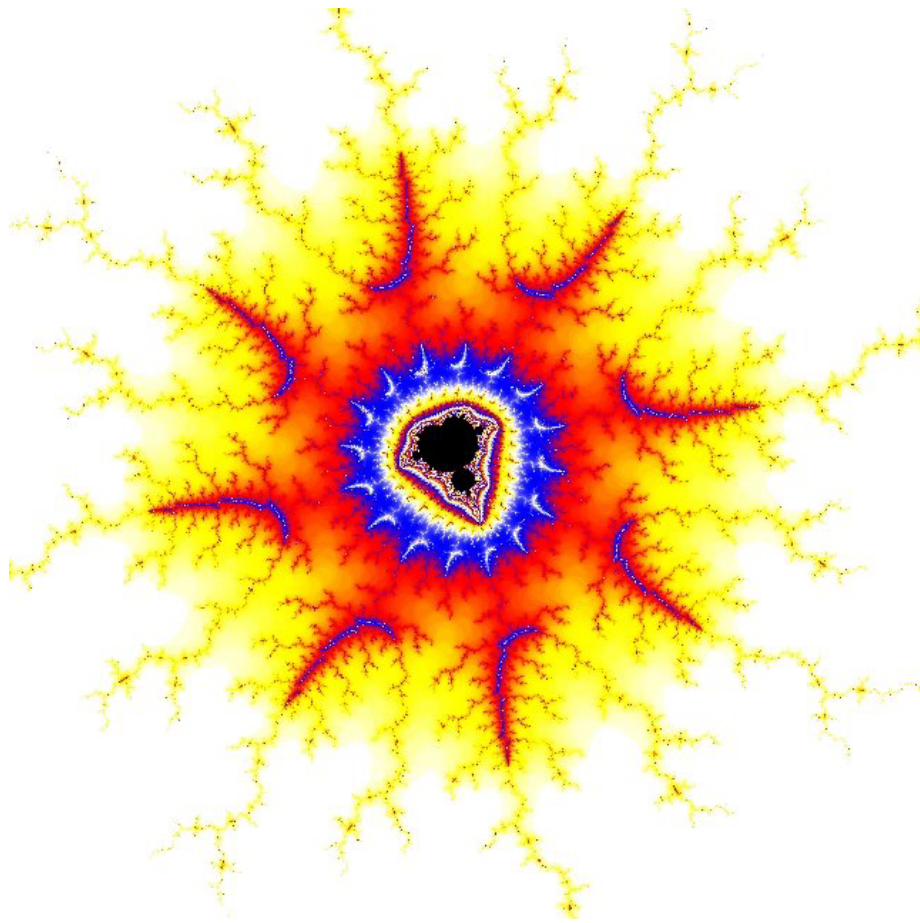


Elementi di Teoria degli Errori



LORENZO ROI

Edizioni H-ALPHA

© Edizioni H-ALPHA. Luglio 2000

L'immagine di copertina rappresenta un particolare dell'insieme di Mandelbrot centrato in $(-1.25355701245029394, 0.344742481317140914)$ e ingrandito 99.744.425 volte.

Titolo: Schizzi frattali.



PREFAZIONE

In questo lavoro sono esposti alcuni concetti che stanno alla base della teoria classica della misura e, facendo ricorso a delle esemplificazioni didattiche, vengono presentati i metodi di trattamento dei dati sperimentali.

L'intendimento è quello di fornire a studenti della scuola superiore i primi elementi per un corretto approccio alla stima delle misure e delle relative incertezze e quindi favorire l'acquisizione di quei criteri che permettono di valutare la quantità e la qualità delle informazioni deducibili da un qualunque esperimento scientifico. La materia è sviluppata prevalentemente in modo informale per cui le conoscenze matematiche richieste risultano abbastanza elementari (la funzione esponenziale pur presente, non viene usata nelle dimostrazioni e non viene utilizzato il calcolo differenziale).

Rispetto alla versione originaria di queste pagine, oramai risalente ai primi anni Novanta, sono stati corretti solo alcuni errori e rifatti ex-novo i diversi grafici: il testo è pertanto sostanzialmente immutato. Ancora un grazie a quanti, studenti e colleghi, hanno contribuito al perfezionamento di questo lavoro.

Vicenza, luglio 2000

Lorenzo Roi



INDICE

Capitolo 1

Introduzione	1
1.1 Grandezze fisiche e loro definizione operativa	1
1.2 Metodo di misura diretto e indiretto	1
1.3 Strumenti e loro caratteristiche	2
1.4 Tipi di errore	4

Capitolo 2

2.1 Errori massimi	6
2.2 Propagazione degli errori massimi	8

Capitolo 3

3.1 Errori casuali: giustificazione della media	15
3.2 Scarti	18
3.3 Frequenza e distribuzione degli scarti	19
3.4 Funzione di Gauss	22

Capitolo 4

4.1 Stima dello scarto quadratico medio	27
---	----

Capitolo 5

5.1 Analisi dei dati sperimentali (I)	30
5.2 Analisi dei dati (II)	33

Capitolo 6

6.1 Propagazione degli errori statistici	38
--	----

Capitolo 7

7.1 Metodo dei minimi quadrati (regressione lineare)	43
--	----

7.2	Coefficiente di correlazione lineare	48
7.3	Esempi	50

Capitolo 8

8.1	Cifre significative	56
8.2	Media pesata	58

Appendice

Formule principali	62
Bibliografia	65



CAPITOLO 1

Lo scopo di queste pagine è di presentare alcuni metodi di elaborazione dei dati sperimentali. Tali metodi hanno una loro precisa sistemazione nella Statistica ma il carattere prevalentemente operativo che ci si pone suggerisce una esposizione delle nozioni quasi del tutto priva di rigore formale. Inoltre solo una conoscenza approfondita dell'Analisi Matematica, del Calcolo Combinatorio e della Teoria delle Probabilità assicura gli strumenti concettuali opportuni per una deduzione formale delle idee esposte.

Tuttavia nei limiti di una trattazione introduttiva, verranno affrontati importanti concetti probabilistici e presentate con il supporto di numerosi esempi, le relative metodologie. Dove sarà possibile si forniranno anche delle dimostrazioni formali o quanto meno delle giustificazioni.

1.1 Grandezze fisiche e loro definizione operativa

È noto che il concetto di grandezza fisica si ritiene specificato quando risulta possibile associare in modo univoco attraverso un gruppo ben preciso di operazioni, un numero, la misura di questa grandezza fisica. La grandezza fisica è pertanto definita operativamente dal corrispondente gruppo di operazioni e questo ne costituisce il procedimento di misura.*

Da ciò discende l'attenzione che si deve porre alle operazioni concrete che si svolgono in laboratorio, alla loro successione temporale, agli strumenti adoperati così da ridurre le sempre presenti ambiguità che ostacolano la riproducibilità delle esperienze e che, vedremo, disperdono il loro contenuto informativo e la loro "oggettività".

L'operazione di misura di una grandezza fisica può essere condotta in due modi diversi: con il metodo di misura diretto o con quello indiretto.

1.2 Metodo di misura diretto e indiretto

Nel modo diretto la grandezza fisica che si vuole misurare viene confrontata con un'altra a questa omogenea scelta come campione. Quest'ultima è, come sappiamo, convenzio-

* Si veda il cap. 1 di *P. Bridgman: La logica della Fisica moderna* e per una rassegna critica di tale posizione il cap. 4 di *K. Lambert, G. Gordon: Introduzione alla Filosofia della Scienza*.

nalmente assunta come unità di misura. Per quanto accennato sopra, un tale confronto assume un significato operativo solo se si è stabilito preventivamente cosa significa per due grandezze essere definite “uguali” o che una è il doppio o il triplo dell’altra. Il risultato che esprime tale confronto è un numero, la misura della grandezza in esame. Pertanto una grandezza fisica risulta caratterizzata dalla sua “dimensione” (lunghezza, tempo, ...) e dalla sua misura associata alla relativa unità (per es. 3 metri, ...).

D’altra parte lo scopo principale per chi voglia affrontare lo studio di un fenomeno è quello di ricercare, se possibile, delle relazioni tra le grandezze fisiche coinvolte così da definire delle leggi che riescano a “spiegare” * in qualche modo l’evidenza sperimentale. Dal punto di vista classico si vorrebbe che queste leggi determinassero delle rigide concatenazioni di cause ed effetti. Altre volte invece, si desidera verificare se eventuali previsioni teoriche siano o meno coerenti con l’esperienza.

Comunque in ogni caso, le grandezze fisiche sono legate tramite delle relazioni matematiche ad altre grandezze: per esempio, volendo misurare la velocità media di un corpo ed essendo questa definita come

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

allora, dalla conoscenza dello spazio Δs percorso nell’intervallo Δt si deduce v_m eseguendo semplicemente il rapporto delle misure di Δs e Δt . In ciò consiste il metodo di misura indiretto.

In generale, se la grandezza y dipende dalle grandezze fisiche x_1, x_2, \dots, x_n , tramite la legge

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

la sua misura si ottiene misurando in modo diretto x_1, x_2, \dots, x_n ed inserendo queste determinazioni nella relazione che definisce y . Le x_1, x_2, \dots, x_n si dicono grandezze fondamentali e la y grandezza derivata. L’unità di misura di quest’ultima risulta fissata quando si siano definite le unità delle grandezze fondamentali: per es. se l’unità in cui si esprime Δs è il metro m e Δt il secondo s , avremo per la velocità l’unità derivata m/s .

1.3 Strumenti e loro caratteristiche

L’esecuzione delle misure avviene utilizzando opportuni strumenti che essendo degli oggetti reali permettono di “conoscere” il valore della grandezza misurata con una certa indeterminazione. È necessario perciò aver ben presenti le caratteristiche di questi dispositivi.

Innanzitutto bisogna tener conto dell’intervallo di funzionamento di uno strumento. Difatti ogni strumento è in grado di fornire delle misure di una grandezza partendo da un valore minimo detto *soglia* e fino ad un valore massimo che ne è la *portata*. L’ampiezza di questo intervallo dipende dalle sue caratteristiche costruttive e queste sono pure responsabili del fatto che al di fuori di questi limiti la risposta dello strumento è in genere

* Per il concetto di spiegazione, si veda *Lambert–Gordon*.

alterata cosicché la corrispondenza tra questa e la grandezza da misurare non offre più sufficienti garanzie di riproducibilità. Spesso difatti si può danneggiare lo strumento se usato al di fuori dei suoi limiti di funzionamento: si provi a pesare un elefante con una bilancia pesa-persone!

Supponiamo di dover misurare con un calibro il diametro di una sferetta d'acciaio: osserviamo che lo zero del cursore sta tra le incisioni che indicano 8 e 9 mm. Diremo che il diametro d è compreso tra 8 e 9 mm ossia

$$8 \text{ mm} < d < 9 \text{ mm}$$

o come si usa più spesso

$$d = (8,5 \pm 0,5) \text{ mm.}$$

Analogamente se misuriamo il tempo di caduta della sferetta da un'altezza $h = 1 \text{ m}$ con un cronometro digitale al centesimo di secondo e troviamo $t = 45 \times 10^{-2} \text{ s}$, ciò dev'essere interpretato in realtà come

$$44,5 \times 10^{-2} \text{ s} < t < 45,5 \times 10^{-2} \text{ s}$$

ossia

$$t = (45 \pm 0,5) \times 10^{-2} \text{ s.}$$

Ciò significa che questi strumenti non sono sensibili per variazioni di questa entità delle grandezze da misurare.

Si definisce pertanto *sensibilità* di uno strumento *il minimo valore* della grandezza che si vuole misurare ancora *apprezzabile* dallo strumento e l'indeterminazione che ne segue nella misura della grandezza è detto *errore di sensibilità*. Negli esempi presentati l'errore di sensibilità dell'unica misura effettuata è di 0,5 mm per il calibro e $0,5 \times 10^{-2} \text{ s}$ per il cronometro digitale.

Una tale situazione è generale riscontrandosi per la misura di qualsiasi grandezza fisica: *il valore di questa non può essere conosciuto con una incertezza minore della sensibilità dello strumento usato.*

Il passo successivo è perciò quello di aumentare la sensibilità degli strumenti. Nel caso del calibro ciò si realizza aggiungendo il nonio con il quale si può eseguire comunemente una misura di lunghezza a meno di $1/20 \text{ mm}$ (se questo ha un numero di suddivisioni pari a 20). In tal modo l'errore di sensibilità diviene $\Delta l = 0,5/20 = 0,025 \text{ mm}$ e se prima una serie di misure forniva i valori

$$d_1 = 8,5 \pm 0,5 \text{ mm} \quad d_2 = 8,5 \pm 0,5 \text{ mm} \quad d_3 = 8,5 \pm 0,5 \text{ mm}$$

ora con una sensibilità maggiore si ottiene

$$d_1 = 8,25 \pm 0,025 \text{ mm} \quad d_2 = 8,40 \pm 0,025 \text{ mm} \quad d_3 = 8,45 \pm 0,025 \text{ mm}.$$

È immediato notare la sostanziale differenza delle due serie. Anche pensando di disporre di uno strumento ideale estremamente sensibile, ripetendo più volte la misura nelle medesime condizioni operative si otterrebbero risultati numerici diversi e con un numero maggiore di cifre diverse quanto più piccolo è l'errore di sensibilità. La causa di ciò sta da un lato nella impossibilità pratica di assicurare la riproducibilità delle operazioni di misura essendo queste la manifestazione di un notevole numero di contributi di cui non è possibile tener conto individualmente (si pensi ad es. a tutti gli attriti che un indice mobile trova quando si muove su un quadrante o alle variazioni di lunghezza indotte su un calibro dal variare della temperatura), e dall'altro nelle variazioni casuali della grandezza da misurare, fattore questo che implica una non riproducibilità intrinseca. Basta pensare al tempo di caduta di un corpo in un fluido e come questo sia influenzato dall'urto con un elevato numero di particelle in moto disordinato oppure alla corrente elettrica (funzione della carica e del moto di un gran numero di particelle) per convincersi della imprevedibilità dei valori istantanei.

Ne segue che il valore “vero” di una grandezza risulta comunque una *entità che non è possibile conoscere*: il risultato è perciò sempre un numero che approssima il valore “vero” della grandezza misurata cioè la misura è affetta da errori che si manifestano quando la loro ampiezza supera l'errore di sensibilità dello strumento.

Una misura non è, in conclusione, mai esatta.

La presente trattazione ha lo scopo di introdurre ad una metodologia che, pur rinunciando sin dall'inizio alla conoscenza del “vero”, dia la possibilità di stimare l'indeterminazione che è associata ad una serie di misure e quindi fornisca dei criteri per valutare la quantità e la qualità delle informazioni che da queste si possono dedurre. L'entità di questa indeterminazione fornisce in ultima analisi, l'attendibilità delle misure.

1.4 Tipi di errore

Le cause responsabili degli errori sono sempre molteplici ma esse intervengono sulle misure essenzialmente in due modi distinti, originando errori di tipo sistematico o errori casuali. L'azione degli *errori sistematici* è tale da condurre a valori sistematicamente in eccesso o in difetto rispetto al valore effettivo: hanno cioè sempre lo stesso segno.

Se per es. utilizziamo una bilancia per determinare la massa di un corpo e questa ha un braccio leggermente più lungo dell'altro, ponendo la massa incognita sul piatto sospeso al braccio più lungo, i risultati che si ottengono sono sempre in eccesso rispetto al valore vero.

Così se eseguiamo delle misure di lunghezza con il calibro alla temperatura di 0 °C, i valori letti saranno sistematicamente in eccesso in quanto al diminuire della temperatura il calibro si contrae.

Un altro classico esempio è quello di un orologio regolato su una frequenza che non è quella prevista e pertanto potrà risultare sempre in anticipo o in ritardo.

Infine è a tutti noto che l'ampiezza delle oscillazioni di un pendolo semplice non è costante ma che diminuisce con il tempo. D'altra parte è spesso comodo trascurare questa

osservazione e sviluppare una teoria dove l'ampiezza è una costante. Basandoci su questa teoria e andando a misurare l'ampiezza di oscillazione di un pendolo troviamo dei risultati costantemente in difetto.

Da questi esempi come da numerosi altri, si deduce che gli errori sistematici possono essere causati da

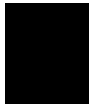
- a. difetti costruttivi (bilancia),
- b. difetti di taratura (orologio),
- c. da un non corretto uso condotto in condizioni non previste (calibro),
- d. da definizioni teoriche approssimative,
- e. da realizzazioni pratiche poco precise dove il fenomeno fisico in esame viene mascherato da altri effetti perturbativi (pendolo).

Il *ripetere più volte la misura nelle medesime condizioni sperimentali non elimina la presenza di questo tipo di errore* e non offre nessuna garanzia sul loro valore e segno. Spesso non è quindi possibile evidenziare questi errori. D'altra parte pur non potendosi eliminare del tutto, l'individuazione delle possibili cause permette di ridurre sostanzialmente il loro peso. Ciò si può realizzare perfezionando lo studio teorico del fenomeno mentre in generale, per determinarne il valore e segno, vanno eseguite misure alternative con tecniche diverse e con diverse sensibilità. L'analisi di questi errori dipende in definitiva dalla preparazione teorica e pratica dello sperimentatore, dalla sua abilità e dal suo intuito fisico.

Gli *errori casuali* sono dovuti ad un numero elevato di fattori non controllabili e per i quali non è possibile un'analisi puntuale. Agiscono in entrambe le direzioni fornendo valori in eccesso o in difetto rispetto al valore vero. Come già sottolineato questi si manifestano quando si ripete più volte la misura e le fluttuazioni di questa sono maggiori dell'errore di sensibilità dell'apparato. Le cause principali possono ricercarsi nel variare incontrollato di alcune condizioni sperimentali come la temperatura, pressione, umidità, corrente, tensione oppure per la presenza di disturbi originati sia dagli strumenti di misura che da fattori esterni all'esperimento quali vibrazioni, campi elettrici e magnetici, polvere... Altre volte l'errore è introdotto dallo stesso sperimentatore che talvolta "fa parte" dell'apparato per es. azionando a mano un cronometro o con lo stimare "ad occhio" la posizione di un indice all'interno della più piccola divisione dello strumento e tale stima è, evidentemente, soggetta a variare. Infine, così come per gli errori sistematici, spesso contribuisce ad errori casuali l'imprecisione nella definizione della grandezza da misurare. Per es. la misura del diametro di una sferetta dipende evidentemente dalle posizioni considerate su di essa non essendo questa perfettamente sferica.

Lo studio di questi errori presuppone l'esecuzione di un numero sufficientemente alto di misure, svolte tutte, per quanto possibile, nelle medesime condizioni. Ottenuta la relativa distribuzione e in base alla teoria che sarà sviluppata, si potranno estrarre dei valori con diversi gradi di attendibilità e di contenuto informativo.

La teoria degli errori che segue riguarda appunto solo gli errori casuali.



CAPITOLO 2

2.1 Errori massimi

Il risultato di una serie di 10 misure del periodo di un pendolo semplice fatte con un contasecondi è

$$\begin{aligned}T_1 &= 3 \text{ s} \\T_2 &= 3 \text{ s} \\&\vdots \\T_{10} &= 3 \text{ s}.\end{aligned}$$

Come si vede si è sempre ottenuto lo stesso numero. Se definiamo frequenza f di una certa misura il rapporto che si ottiene fra il numero n di volte che questa si è presentata con il numero totale N di prove o misure effettuate cioè

$$f = \frac{n}{N}$$

si può affermare che nel nostro esempio $f(3) = 1$.

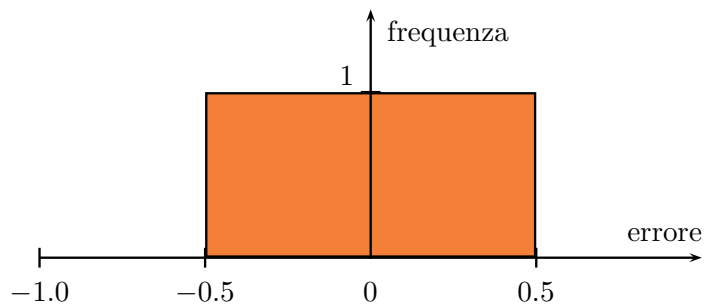


Fig. 1 Distribuzione dell'errore

Per quanto detto alle sezioni 1.2 e 1.3, non possiamo concludere che il periodo del pendolo è “esattamente” $T = 3$ s cioè credere che la misura effettuata sia priva di errore. Difatti chiamando ϵ l'errore della misura, ossia la differenza $\epsilon = T - T_v$ tra la misura T e il valore vero del periodo T_v , possiamo solo affermare che ogni valore di ϵ compreso tra $-0,5$ s e $+0,5$ s è ugualmente probabile in quanto, a causa della sensibilità dell'orologio, ogni valore di T tale che $2,5 \text{ s} \leq T \leq 3,5 \text{ s}$ dà lo stesso risultato e quindi è pure esso ugualmente probabile. Se associamo alla frequenza f l'asse verticale e ad ϵ l'asse orizzontale, la fig. 1 rappresenta la distribuzione dell'errore ϵ mentre la fig. 2 esprime la distribuzione sperimentale delle misure di T . Una tale situazione si determina ogni qual volta l'errore di sensibilità è maggiore delle fluttuazioni dovute agli errori casuali: in tal modo eventuali informazioni di tipo statistico vengono mascherate dall'apparato.

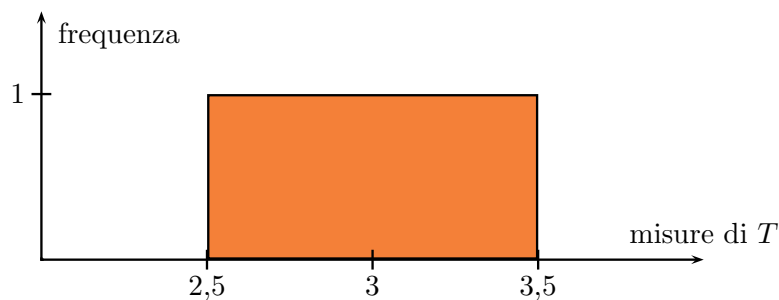


Fig. 2 Distribuzione sperimentale.

In generale, quando una certa grandezza x che chiameremo anche *variabile casuale* assume valori nell'intervallo $a \leq x \leq b$ e questi hanno tutti la medesima probabilità di realizzarsi, la sua funzione di frequenza è del tipo di fig. 3.

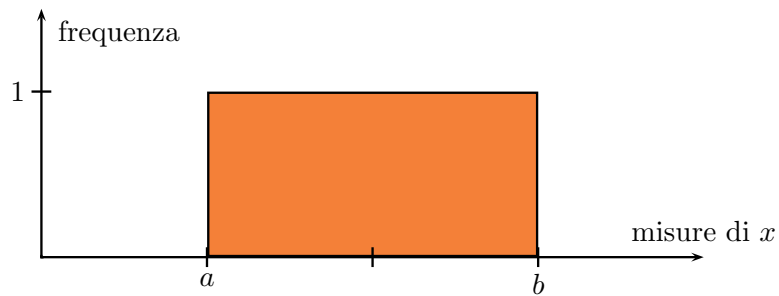


Fig. 3 Distribuzione uniforme.

In tal caso il valore medio della variabile casuale è

$$x = \frac{a + b}{2} \quad (2.1)$$

e l'ampiezza dell'intervallo $[a, b]$ cioè $b - a$ si suole identificare con il doppio dell'errore di sensibilità

$$2\Delta x = b - a. \quad (2.2)$$

Nell'esempio riportato (così come in quello di p. 3) è $T = 3$ s, $\Delta T = 0,5$ s e la misura va riportata come

$$T = 3,0 \pm 0,5 \text{ s.}$$

L'errore che così si associa alla misura viene detto *errore massimo* e la sua valutazione costituisce fondamentalmente un riconoscimento della limitata sensibilità dell'apparato usato, sensibilità che non permette di evidenziare le fluttuazioni casuali che l'apparato e la grandezza in esame comunque possiedono. È ancora questo tipo di errore che si considera quando la grandezza fisica viene misurata una sola volta.

2.2 Propagazione degli errori massimi

Le considerazioni svolte finora ci hanno permesso di associare ad una misura o ad una serie di misure avente una distribuzione uniforme (fig. 3) una stima Δx sulla loro attendibilità.

Tutto ciò si applica a misure dirette.

D'altra parte spesso capita di dover risalire ad una grandezza fisica in modo indiretto. Si pensi ad es. alla difficoltà (!) di misurare direttamente la distanza terra-sole oppure la distanza tra due atomi in un reticolo cristallino o ancora la frequenza di un laser elio-neon o la massa della terra. Altre volte ci si trova nelle condizioni di voler verificare se una certa ipotesi è coerente con il resto della teoria o con risultati già acquisiti per altre vie. Allora, ricordando quanto detto a p. 2, alla misura della grandezza y

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.3)$$

si può risalire tramite la misura diretta delle x_i . Il nostro scopo è di determinare l'errore Δy da assegnare alla y a seguito delle incertezze Δx_i presenti sulle x_i . Supponiamo per semplicità che

$$y = f(x) \quad (2.4)$$

ossia che y sia funzione della sola variabile x . Un esempio molto semplice della precedente è

$$T = \frac{1}{10} \cdot x \quad (2.5)$$

dove x è il tempo impiegato da un pendolo semplice per compiere 10 oscillazioni e T è il periodo di una oscillazione. Se riportiamo su un piano cartesiano il grafico della funzione

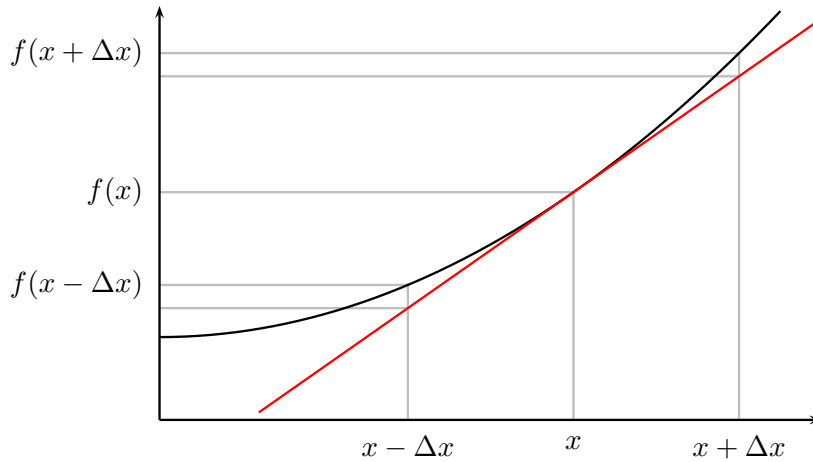


Fig. 4 Approssimazione lineare ad una funzione.

(2.4), fig. 4, poiché la x è conosciuta con un errore Δx e gli estremi dell'intervallo in cui essa può assumere dei valori sono

$$x + \Delta x \quad x - \Delta x \tag{2.6}$$

in corrispondenza abbiamo i valori

$$f(x + \Delta x) \quad f(x - \Delta x). \tag{2.7}$$

Se l'errore Δx è piccolo, il tratto di curva compreso tra gli estremi indicati in (2.6) si può confondere con la retta tangente in x e concludere che, poiché l'ampiezza degli intervalli $[x - \Delta x, x]$, $[x, x + \Delta x]$ è la medesima, in prima approssimazione può pure essere uguale quella dei corrispondenti valori di y cioè

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f \tag{2.7a}$$

$$f(x) - f(x - \Delta x) = \Delta f. \tag{2.7b}$$

Sommando membro a membro

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2\Delta f,$$

da cui dividendo per 2 otteniamo

$$\Delta f = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2}. \tag{2.8}$$

Notando che nella fig. 4 $f(x + \Delta x)$ corrisponde al valore massimo di $f(x)$ nell'intervallo $[x - \Delta x, x + \Delta x]$ indicato come $f(max)$, e $f(x - \Delta x)$ al minimo $f(min)$, la (2.8) si riscrive anche

$$\Delta y = \frac{f(max) - f(min)}{2} \quad (2.9)$$

Una tale stima dell'errore, detta anche *semidispersione massima* evidentemente si basa sull'ipotesi che gli errori siano piccoli e che perciò si possa "linearizzare" la funzione $f(x)$ approssimandola ad una retta (le piccole differenze riscontrabili nella fig. 4 diventano così trascurabili). In caso contrario conviene fornirsi di uno strumento più preciso (è inutile voler misurare la massa di una zanzara con la bilancia pesa-elefanti!). Nell'esempio (2.5), noto x con l'errore Δx allora

$$f(max) = T_1 = \frac{(x + \Delta x)}{10} \quad f(min) = T_2 = \frac{(x - \Delta x)}{10}$$

e il periodo è noto con l'errore (2.9)

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{2} \left(\frac{x + \Delta x}{10} - \frac{x - \Delta x}{10} \right) = \left(\frac{x + \Delta x - x + \Delta x}{10} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \Delta x}{10} = \frac{\Delta x}{10}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Il passo successivo consiste nell'estendere questa analisi a funzioni y più generali. Soffermandoci alle forme più comuni, sia

$$y = x_1 + x_2 = f(x_1, x_2)$$

con Δx_1 e Δx_2 errori massimi per x_1 e x_2 . Poiché $f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) = (x_1 + \Delta x_1) + (x_2 + \Delta x_2)$ utilizzando la (2.7a) discende

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x_1 + \Delta x_1 + x_2 + \Delta x_2) - (x_1 + x_2) \\ &= x_1 + \Delta x_1 + x_2 + \Delta x_2 - x_1 - x_2 = \Delta x_1 + \Delta x_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Se invece è $y = x_1 - x_2$ il suo valore massimo è raggiunto quando il primo termine assume il valore massimo $x_1 + \Delta x_1$ e il secondo il valore minimo $x_2 - \Delta x_2$ per cui, sempre in base alla (2.7a)

$$\begin{aligned} \Delta y &= [(x_1 + \Delta x_1) - (x_2 - \Delta x_2)] - (x_1 - x_2) \\ &= x_1 + \Delta x_1 - x_2 + \Delta x_2 - x_1 + x_2 = \Delta x_1 + \Delta x_2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

che è analoga alla (2.11).

Se $y = x_1 \cdot x_2$ avremo $f(max) = (x_1 + \Delta x_1)(x_2 + \Delta x_2)$

$$\begin{aligned}
\Delta y &= (x_1 + \Delta x_1)(x_2 + \Delta x_2) - x_1 x_2 \\
&= x_1 x_2 + x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1 - x_1 x_2 \\
&= x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Per

$$y = \frac{x_1}{x_2}$$

risulta

$$f(max) = \frac{x_1 + \Delta x_1}{x_2 - \Delta x_2}$$

per cui

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \frac{x_1 + \Delta x_1}{x_2 - \Delta x_2} - \frac{x_1}{x_2} \\
&= \frac{x_1 x_2 + x_2 \Delta x_1 - x_1 x_2 + x_1 \Delta x_2}{(x_2)^2 - x_2 \Delta x_2} \\
&= \frac{x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2}{(x_2)^2}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

dove si è ritenuto di trascurare $x_2 \Delta x_2$ nei confronti di $(x_2)^2$ (siamo nell'ipotesi di errori piccoli nei confronti con la misura).

La generalizzazione delle (2.11) e (2.12) al caso di una somma algebrica di n termini è evidentemente espressa dalla

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \Delta x_i \tag{2.15}$$

in cui per la prima volta appare il simbolo \sum di sommatoria. L'espressione a secondo membro della (2.15) si legge "somma sull'indice i da 1 a n " dei termini Δx_i , sta in luogo della somma

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n$$

e costituisce una notazione molto comoda e sintetica. Nel caso invece delle (2.13) e (2.14) la generalizzazione diviene più comprensibile se si introduce l'errore relativo ϵ_r della grandezza x , definito come

$$\epsilon_r = \frac{\Delta x}{x}. \tag{2.16}$$

Allora dividendo la (2.13) per $y = x_1 x_2$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{y} &= \frac{x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1}{x_1 x_2} = \frac{x_1 \Delta x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_2 \Delta x_1}{x_1 x_2} \\ &= \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_1}{x_1}\end{aligned}\quad (2.17)$$

e analogamente la (2.14) per $y = x_1/x_2$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{y} &= \frac{x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2}{(x_2)^2} \cdot \frac{x_1}{x_2} \\ &= \frac{x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2}{(x_2)^2} \cdot \frac{x_2}{x_1} \\ &= \frac{x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2}{x_1 x_2} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}\end{aligned}\quad (2.18)$$

da cui segue che, se y è espressa come prodotto o quoziente di n termini, si giunge alla

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \dots + \frac{\Delta x_n}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{x_i}\quad (2.19)$$

ossia

$$\Delta y = y \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{x_i}\quad (2.20)$$

Qualche esempio potrà chiarire l'utilità della (2.15) e della (2.20). Supponiamo di voler determinare l'errore sul valore dell'accelerazione di gravità g dedotto per mezzo dell'espressione

$$g = \frac{4 \cdot \pi^2 l}{T^2}\quad (2.21)$$

dimostrata valida per il pendolo semplice.

Appare evidente che i termini responsabili dell'errore Δg su g sono la lunghezza l con il relativo errore massimo Δl , il periodo T con ΔT e pure π in quanto costante non nota esattamente per la quale si deve usare sempre un valore approssimato: difatti se si utilizza $\pi \approx 3,14$ allora $\Delta \pi = 0,01$ in quanto $\pi = 3,14 \pm 0,01$.

Riscritta la (2.21) come

$$g = 4 \cdot \frac{\pi \cdot \pi \cdot l}{T \cdot T}$$

ed essendo 5 i termini che compaiono come fattori nel numeratore e nel denominatore ("4" è una costante nota esattamente) si ha per la (2.19)

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta T}{T} = 2\frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T}$$

che per la (2.20) diviene

$$\Delta g = g \left(2\frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T} \right), \quad (2.22)$$

relazione che esprime la dipendenza funzionale di Δg dagli errori massimi delle grandezze π, l, T .

Analogamente se si vuole l'errore sul coefficiente di dilatazione dei gas α , espresso dalla

$$\alpha = \frac{V_f - V_i}{V_i(t_f - t_i)}$$

notando la presenza dei 3 termini $(V_f - V_i), V_i, (t_f - t_i)$, per la (2.20)

$$\Delta \alpha = \alpha \left[\frac{\Delta(V_f - V_i)}{V_f - V_i} + \frac{\Delta V_i}{V_i} + \frac{\Delta(t_f - t_i)}{t_f - t_i} \right] \quad (2.23)$$

mentre per la (2.15)

$$\begin{aligned} \Delta(V_f - V_i) &= \Delta V_f + \Delta V_i = 2\Delta V \\ \Delta(t_f - t_i) &= \Delta t_f + \Delta t_i = 2\Delta t \end{aligned}$$

dove si è supposto che l'errore sulla determinazione del volume finale V_f ed iniziale V_i sia lo stesso cioè $\Delta V_f = \Delta V_i = \Delta V$ così come quello sulle rispettive temperature $\Delta t_f = \Delta t_i = \Delta t$. In base a ciò la (2.23) assume la forma definitiva

$$\Delta \alpha = \alpha \left[2\frac{\Delta V}{V_f - V_i} + \frac{\Delta V}{V_i} + 2\frac{\Delta t}{t_f - t_i} \right].$$

L'ultimo esempio fa uso della legge dei punti coniugati

$$f = \frac{p \cdot q}{p + q} \quad (2.24)$$

che dà la lunghezza focale f di una lente sottile. Con la medesima simbologia, essendo 3 i termini che compaiono al numeratore e a denominatore $p, q, (p + q)$, per la (2.20)

$$\Delta f = f \left[\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta q}{q} + \frac{\Delta(p + q)}{p + q} \right]$$

che per la (2.15) diviene

$$\Delta f = f \left[\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta q}{q} + \frac{\Delta p + \Delta q}{p + q} \right].$$

Supponendo ancora che $\Delta p = \Delta q = \Delta l$ in quanto p e q sono delle lunghezze misurate con il medesimo strumento, si ha

$$\Delta f = f \left[\frac{\Delta l}{p} + \frac{\Delta l}{q} + 2 \frac{\Delta l}{p + q} \right].$$

Ricordiamo che un tale modo di procedere è sostituito ad un livello più approfondito di conoscenze matematiche da un uso appropriato del concetto di differenziale di una funzione. Infine, ulteriori considerazioni sul significato e l'importanza dell'errore relativo verranno esposte in seguito (cap. 6.1).



CAPITOLO 3

3.1 Errori casuali: giustificazione della media

Ritorniamo a considerare il problema della misura diretta di una grandezza fisica G nell'ipotesi di disporre di uno strumento con errore di sensibilità sufficientemente piccolo cosicché diventa possibile evidenziare gli errori casuali.

Il risultato di N misure sperimentali sarà costituito da x_1, x_2, \dots, x_N valori numerici tutti ottenuti nelle medesime condizioni sperimentali e con gli stessi strumenti. L'esempio che ci servirà per sviluppare la teoria degli errori casuali si basa sulla misura della durata di 10 oscillazioni di un pendolo semplice, grandezza fisica che indicheremo con T_{10} ma che, per non appesantire la scrittura di troppi indici, scriveremo più semplicemente T . Nella tabella 1 sono riportate 100 determinazioni dirette di T_{10} , effettivamente ottenute (che divertimento!) con un comune cronometro digitale.

Appare subito evidente la diversità dei valori ottenuti, diversità che fa nascere il problema di quale valore assegnare alla grandezza fisica G (nel nostro caso T_{10}): ci chiediamo cioè quale è, e lo indicheremo con \bar{x} , il valore più attendibile per G . Non è possibile ovviamente privilegiare un determinato valore x_i e scartare gli altri in quanto non c'è alcuna ragione che può giustificare tale scelta preferenziale e che differenzia x_i dalle rimanenti $N - 1$ determinazioni. Il valore \bar{x} dovrà pertanto dipendere da tutte le x_i e in modo che ciascuna abbia la medesima importanza o peso.

Per ottenere l'espressione di \bar{x} riportiamo in un piano cartesiano i punti (i, x_i) dove l'ascissa è il numero d'ordine $i = 1 \dots N$ della misura e l'ordinata è il valore di questa (fig. 5). Tracciata una retta parallela all'asse delle ascisse, ogni punto avrà da questa una distanza che si ottiene prendendo il valore assoluto della differenza tra le ordinate di (i, x_i) e del corrispondente punto H avente la medesima ascissa ma appartenente alla retta (fig. 6).

Assumiamo come ipotesi plausibile che il valore cercato corrisponda a quella retta orizzontale $y = \bar{x}$ che lascia approssimativamente un egual numero di punti nei due semipiani in cui essa divide il piano cartesiano: in tal caso $y = \bar{x}$ "interpola" nel miglior modo possibile i valori sperimentali. Convenendo di considerare la distanza con segno dei punti sperimentali da $H(i, x)$ cioè

Tabella 1: durata di 10 oscillazioni

N	s	N	s	N	s	N	s	N	s
1	33,39	21	33,32	41	33,46	61	33,45	81	33,38
2	33,36	22	33,36	42	33,39	62	33,32	82	33,52
3	33,31	23	33,46	43	33,45	63	33,49	83	33,28
4	33,34	24	33,39	44	33,56	64	33,51	84	33,35
5	33,28	25	33,36	45	33,46	65	33,28	85	33,41
6	33,36	26	33,36	46	33,46	66	33,37	86	33,52
7	33,57	27	33,35	47	33,40	67	33,52	87	33,51
8	33,54	28	33,46	48	33,51	68	33,53	88	33,47
9	33,47	29	33,49	49	33,41	69	33,50	89	33,49
10	33,35	30	33,38	50	33,47	70	33,41	90	33,53
11	33,48	31	33,41	51	33,46	71	33,48	91	33,60
12	33,54	32	33,43	52	33,49	72	33,53	92	33,56
13	33,35	33	33,56	53	33,49	73	33,53	93	33,52
14	33,40	34	33,72	54	33,62	74	33,63	94	33,44
15	33,49	35	33,34	55	33,58	75	33,43	95	33,49
16	33,43	36	33,34	56	33,50	76	33,41	96	33,45
17	33,36	37	33,51	57	33,39	77	33,50	97	33,54
18	33,40	38	33,51	58	33,38	78	33,38	98	33,52
19	33,54	39	33,42	59	33,59	79	33,52	99	33,47
20	33,56	40	33,50	60	33,45	80	33,57	100	33,54

$$z_i = x_i - \bar{x},$$

i punti con $x_i > \bar{x}$ avranno così una distanza positiva dalla retta mentre gli altri che appartengono al semipiano inferiore possiederanno distanze negative. L'ipotesi fatta richiede quindi che la *somma delle distanze di tutti i punti sia nulla* ossia che i punti appartenenti a semipiani opposti abbiano lo stesso peso. Ne segue

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = 0 \quad \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N \bar{x} = 0 \quad \sum_{i=1}^N x_i - N \cdot \bar{x} = 0 \quad (3.1)$$

dove si è utilizzata la proprietà associativa della somma (es. $[4 - x] + [2 - x] + [5 - x] = 4 - x + 2 - x + 5 - x = [4 + 2 + 5] - [x + x + x] = [4 + 2 + 5] - 3x$). Dalla terza delle (3.1) discende

$$N \cdot \bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \quad (3.2)$$

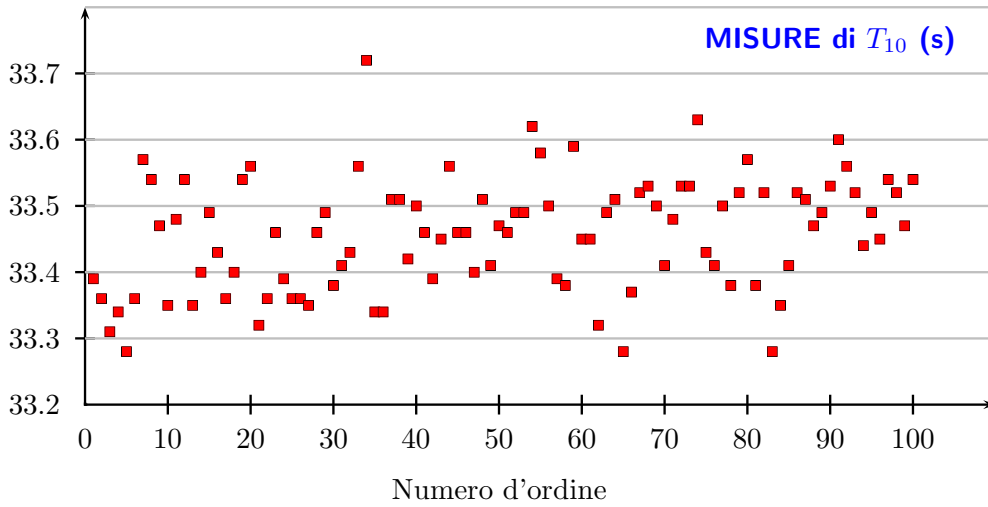


Fig. 5 Diagramma a dispersione dei dati sperimentali.

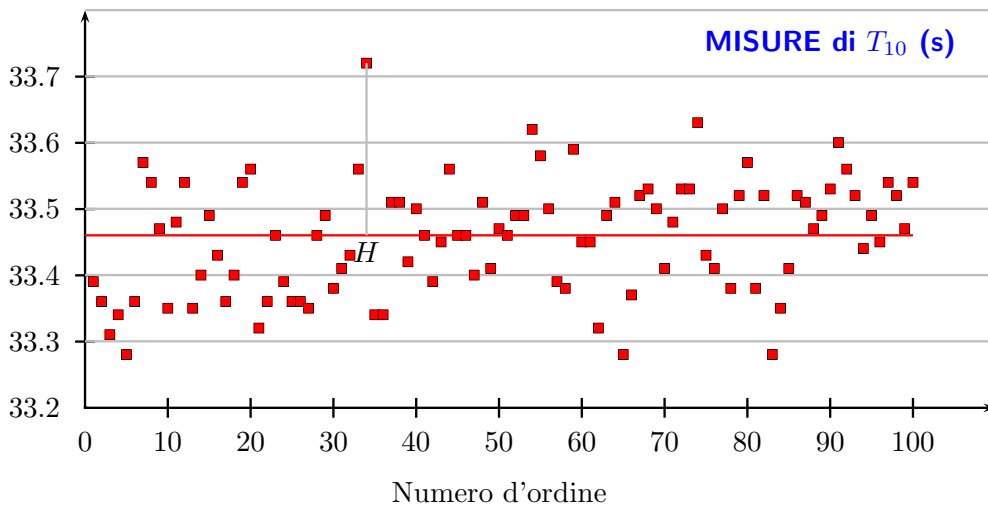


Fig. 6 Distribuzione dei dati.

che risolve il problema iniziale: il valore più attendibile per la grandezza G non è altro che la media aritmetica delle N determinazioni.

In modo alternativo e con l'uso di concetti dell'Analisi Matematica (si veda anche il metodo dei minimi quadrati, cap. 7.1) possiamo giungere a \bar{x} supponendo che questo sia il valore che rende minima la quantità $D(x) = \sum (x_i - \bar{x})^2$ dove per la prima volta si sono sottintesi gli estremi della somma \sum . Per determinare il minimo della funzione $D(x)$ è sufficiente calcolare la sua derivata prima e porla uguale a zero:

$$D'(x) = \sum 2(x_i - \bar{x})(-1) = 0 \quad 2 \cdot \sum (-x_i + \bar{x}) = 0 \quad :2$$

$$\sum(-x_i) + N\bar{x} = 0 \quad - \sum x_i + N\bar{x} = 0 \quad N\bar{x} = \sum x_i$$

da cui, dividendo per N , si riottiene la (3.2).

3.2 Scarti

Per quanto detto inizialmente, al valore appena ottenuto \bar{x} è necessario associare anche una stima dell'errore. Se quindi x_v è il valore vero della grandezza G , l'errore di una singola misura x_i sarà

$$\epsilon_i = x_i - x_v \quad (3.3)$$

e l'errore ϵ da attribuire a x è

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} = \bar{x} - x_v &= \frac{1}{N} \left[\sum x_i \right] - x_v = \frac{\sum x_i - Nx_v}{N} = \frac{1}{N} \cdot \sum (x_i - x_v) \\ \bar{\epsilon} &= \frac{1}{N} \cdot \sum \epsilon_i \end{aligned} \quad (3.4)$$

D'altra parte gli errori ϵ_i possono essere sia positivi che negativi per cui la somma a secondo membro della (3.4) sarà tanto più vicina allo zero tanto maggiore è il numero N delle misure, per cui ϵ tende a zero all'aumentare di N . La media aritmetica quindi approssima il valore vero tanto meglio quanto più numerose sono le misure ottenute. Purtroppo (e succede sempre così!) il valore vero x_v non è noto (e non è conoscibile), per cui anche le espressioni relative agli errori delle misure e della media (3.3, 3.4) rimangono incognite e sono inutilizzabili.

Una quantità che invece è conosciuta è lo scarto dalla media della i -esima misura e questo è definito come

$$z_i = x_i - \bar{x}. \quad (3.5)$$

Confrontato con la (3.3), se N è grande, z_i dovrebbe approssimare l'errore ϵ_i : difatti sottraendo membro a membro la (3.3) con la (3.5)

$$\epsilon_i - z_i = x_i - x_v - (x_i - \bar{x}) = x_i - x_v - x_i + \bar{x} = \bar{x} - x_v \quad (3.6)$$

che per la (3.4) risulta

$$\epsilon_i - z_i = \bar{\epsilon}, \quad (3.7)$$

relazione che mostra come *uno scarto qualsiasi differisca dall'errore della corrispondente misura di una quantità costante che è l'errore della media*. Se perciò il numero N è sufficientemente grande $N \rightarrow \infty$, allora $\epsilon \rightarrow 0$ e lo scarto offre una buona valutazione dell'errore di cui è affetta la singola misura.

Conviene infine ribadire una notevole proprietà degli scarti che inizialmente ci è servita per ottenere il valore medio di una variabile casuale e che ci sarà utile in seguito (sezione 4.1).

Dalla prima delle (3.1) risulta che la somma di tutti gli scarti delle N misure $\sum z_i$ è

$$\sum z_i = \sum (x_i - \bar{x}) = 0. \tag{3.8}$$

La somma degli scarti rispetto alla media di tutte le misure è pertanto nulla.

3.3 Frequenza e distribuzione degli scarti

Vediamo di approfondire operativamente le conclusioni del paragrafo precedente, ottenendo la distribuzione delle 100 misure della tabella 1.

Per far ciò è necessario definire l'ampiezza Δx degli intervalli entro i quali raggruppare le misure ottenute. Se l'errore di sensibilità dello strumento è ΔS è ovvio che non potremo ridurre l'ampiezza a valori $\Delta x < 2\Delta S$. Difatti nel nostro caso essendo $\Delta S = 0,5 \times 10^{-2}$ s, l'ampiezza minima è $\Delta x = 1 \times 10^{-2}$ s cioè di un centesimo di secondo. Contando il numero n di volte che si è ottenuta una certa misura x (per es. $n = 7$ per 33,49 e $n = 4$ per 33,38) e dividendolo per il numero totale di queste (in questo caso $N = 100$) otteniamo la frequenza sperimentale con cui questa si è presentata. Riportiamo in ascissa i diversi intervalli ampi Δx e costruiti i rettangoli aventi la base Δx e altezza pari alla frequenza n/N , otteniamo l'istogramma di fig. 7 che rappresenta la distribuzione sperimentale cercata.

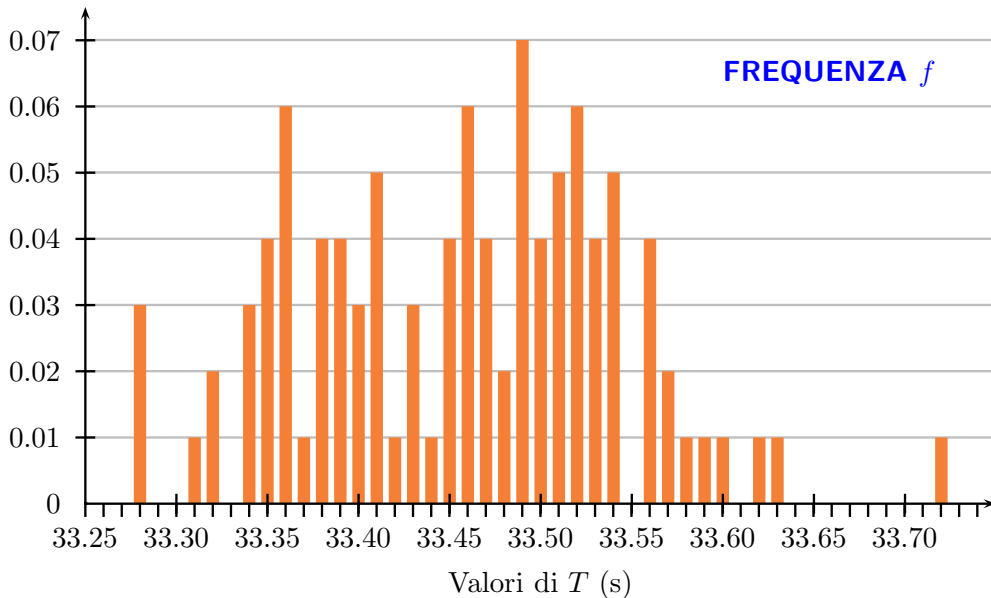


Fig. 7 Istogramma sperimentale $\Delta x = 0,01$ s.

È evidente la differenza sostanziale con la distribuzione uniforme di p.7 e come in quest'ultima siano presenti delle fluttuazioni nella frequenza in funzione dei valori ottenuti dalle misure.

Un'altra caratteristica rilevabile dall'istogramma di fig. 7 è che le misure sono in qualche modo "raggruppate" ossia la frequenza delle misure che differiscono dai valori centrali dell'istogramma tende a zero. Scegliendo un $\Delta x = 2 \times 10^{-2}$ s e procedendo analogamente nel determinare la frequenza di misure che cadono in intervalli di tale ampiezza (per es. $n = 9$ per le misure comprese nell'intervallo $[33,50; 33,51]$), si ottiene l'istogramma rappresentato dalla fig. 8. Così, se $\Delta x = 3 \times 10^{-2}$ s il risultato dell'elaborazione è l'istogramma di fig. 9 (es. $n = 6$ se $[33,55; 33,57]$).

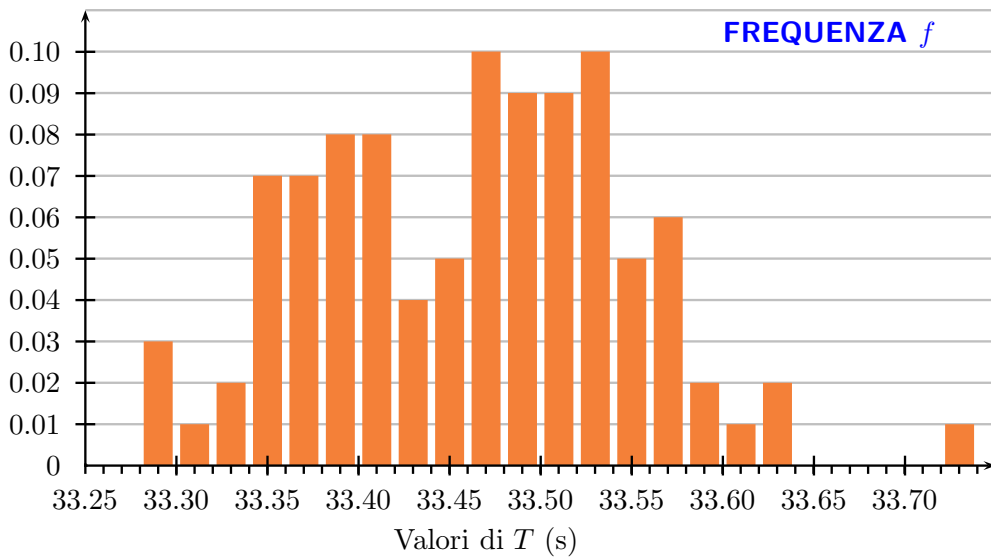


Fig. 8 Iistogramma sperimentale $\Delta x = 0,02$ s.

Da questi tre istogrammi si può notare come all'aumentare dell'ampiezza dell'intervallo Δx vadano scomparendo i dettagli della distribuzione, come si riducano le fluttuazioni statistiche della frequenza e come questa assuma valori sempre più prossimi ad uno (si noti la scala verticale).

Difatti, nel caso estremo, supponendo di disporre di un orologio con errore di sensibilità di 0,5 s per cui l'ampiezza minima sarà $\Delta x = 1$ s, la distribuzione sperimentale sarebbe risultata uniforme (fig. 10) e ogni informazione di origine statistica non avrebbe potuto manifestarsi.

Considerando il valor medio $\bar{T} = 33,46$ s e riportandolo come retta verticale $x = \bar{T}$, possiamo ora specificare maggiormente il carattere della distribuzione trovata. Questa mostra una tendenza a disporsi in modo simmetrico attorno al valor medio, ossia la frequenza assume valori approssimativamente simmetrici rispetto alla retta $x = \bar{T}$.

In secondo luogo, i valori x della grandezza misurata (riportati in ascissa) che differiscono maggiormente dal valor medio, hanno una frequenza che tende allo zero. Utilizzando la

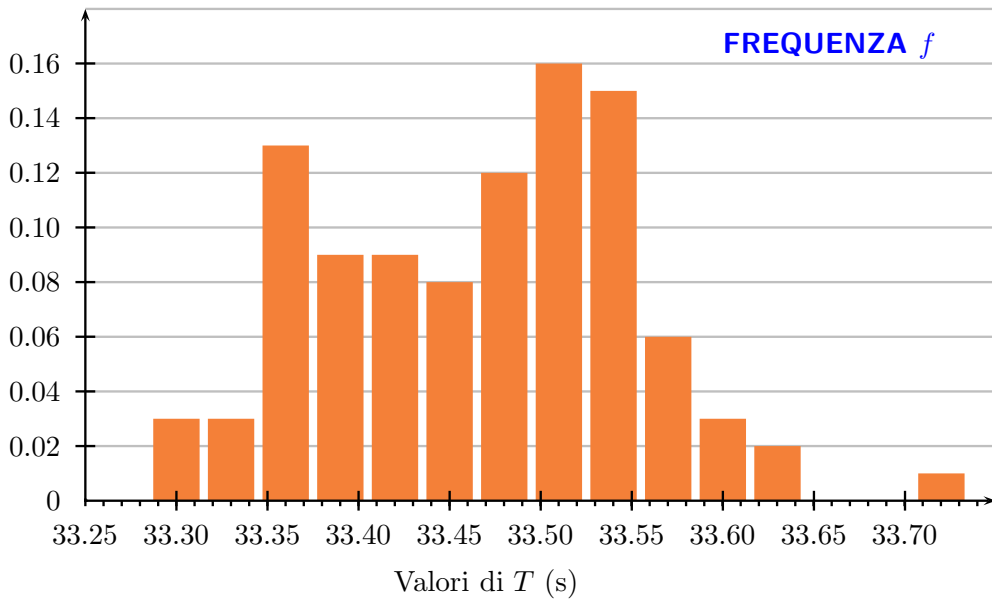


Fig. 9 Istogramma sperimentale $\Delta x = 0,03$ s.

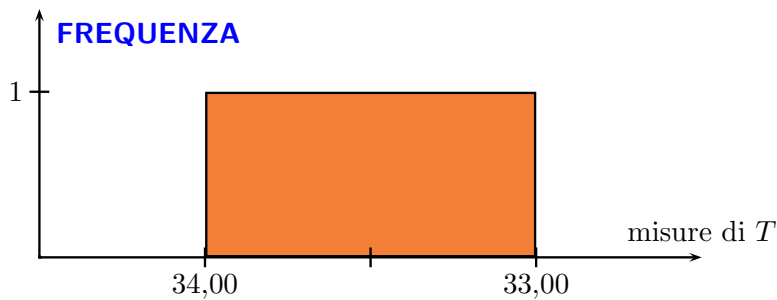


Fig. 10 Istogramma sperimentale $\Delta x = 1$ s.

nozione di scarto $z_i = x_i - \bar{x}$ (nel nostro caso $z_i = T_i - \bar{T}$), la frequenza degli scarti maggiori tende allo zero o in altre parole, gli scarti maggiori risultano meno frequenti.

Quest'ultima affermazione suggerisce anche un altro modo per ottenere le distribuzioni sperimentali dei dati. Anziché riportare in ascissa i valori delle misure che cadono in intervalli di una certa ampiezza e ottenerne poi la frequenza f , si calcola il valor medio \bar{x} e quindi lo scarto z_i di ciascuna misura. Fissata una certa ampiezza Δz si ottiene la frequenza $f = n/N$ con cui gli scarti sono compresi negli intervalli $(0, \Delta z)$, $(\Delta z, 2\Delta z) \dots$; $(-\Delta z, 0)$, $(-2\Delta z, -\Delta z) \dots$

La rappresentazione fornisce ancora istogrammi del tutto analoghi a quelli già visti. Difatti, gli istogrammi degli scarti non sono altro che i precedenti dopo che si è eseguita la traslazione tra il sistema cartesiano di coordinate (x, f) al nuovo sistema di ascissa $z = x - \bar{x}$ e medesima ordinata. La nuova origine è posta in $O'(\bar{x}, 0)$ (fig. 11).

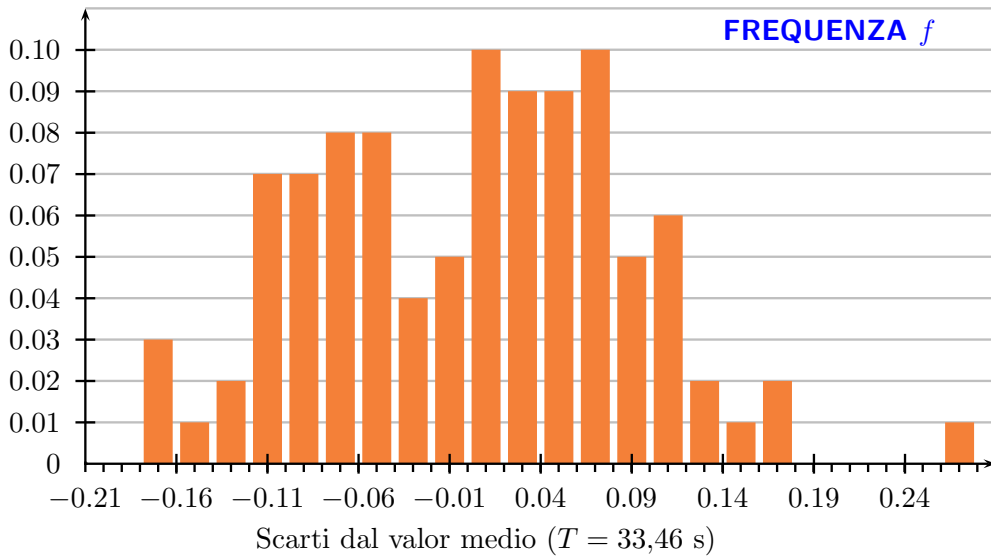


Fig. 11 Istogramma degli scarti.

3.4 Funzione di Gauss

Le distribuzioni discrete ottenute nel paragrafo precedente rappresentano la frequenza relativa con cui una misura x_i è compresa nell'intervallo $[x, x + \Delta x]$.

Supponiamo ora di eseguire un numero molto alto di misure ($N \rightarrow \infty$) e di poter ridurre le ampiezze Δx degli intervalli allo zero ($\Delta x \rightarrow 0$). Ciascun valore x si presenta un numero $n(x)$ di volte. In tali ipotesi si dimostra* che l'istogramma delle frequenze

$$\frac{n(x)}{N}$$

assume una distribuzione continua caratterizzata dalla funzione limite

$$f(x) = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-x_v)^2}{2\mu^2}} \quad (3.9)$$

e tale che

$$\frac{n(x)}{N} = f(x) \cdot \Delta x. \quad (3.10)$$

La $f(x)$ si chiama *funzione di Gauss* o *legge normale* e moltiplicata per Δx esprime la frequenza con cui il valore di una misura x è compreso nell'intervallo $[x, x + \Delta x]$.

Se definiamo come probabilità $p(x)$ di un "evento" x il valore limite verso cui tende la frequenza

* D. Valenza: *La misura fisica con elementi di teoria degli errori.*

$$\frac{n(x)}{N} \quad \text{quando} \quad N \rightarrow +\infty$$

e in termini formali

$$p(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{n(x)}{N}$$

allora dalla (3.10)

$$\Delta p(x) = f(x) \cdot \Delta x \tag{3.11}$$

e potremo dire che la $f(x) \cdot \Delta x$

dà la probabilità di ottenere una misura x compresa nell'intervallo $[x, x + \Delta x]$. Geometricamente la (3.11) si può interpretare come l'area del rettangolo di base Δx e altezza $f(x)$ (fig. 12).

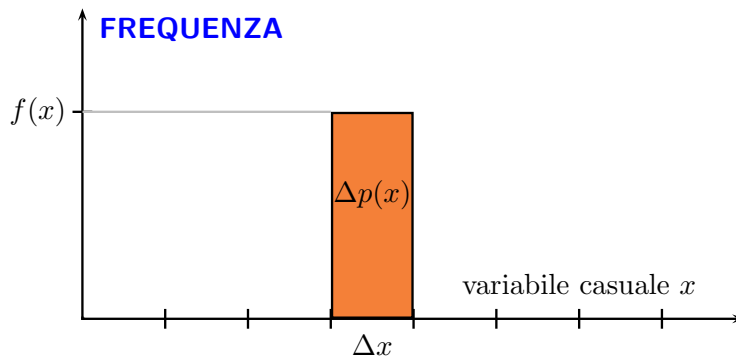


Fig. 12 Rappresentazione geometrica di $\Delta p(x)$.

Più in generale, l'area compresa tra le due rette verticali $x = x_1, x = x_2$, la curva e l'asse delle ascisse, dà la probabilità di ottenere una misura x compresa in

$$x_1 \leq x \leq x_2.$$

Tale informazione sarà scritta come $P(x_1 \leq x \leq x_2)$. Poiché dalla (3.11)

$$\frac{\Delta p(x)}{\Delta x} = f(x),$$

si dice che la *funzione di Gauss esprime una densità di probabilità*. Essa è determinata completamente una volta che si siano ottenuti i 2 parametri x_v e μ . Il primo è il valore vero della grandezza che, per quanto già detto, si può confondere con la media aritmetica

$$x_v \approx \bar{x}$$

mentre μ è detto *scarto quadratico medio* o *deviazione standard* (*s.q.m.* o *standard deviation = s.d.*) ed è un numero positivo definito dalla

$$\mu^2 = \frac{\sum(\epsilon_i)^2}{N} \quad (3.12)$$

(che si dice varianza) cioè

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum(\epsilon_i)^2}{N}} \quad (3.13)$$

dove gli ϵ_i sono definiti dalla (3.3). Più avanti daremo una stima della (3.13) ottenuta sulla base dei dati sperimentali.

Le caratteristiche fondamentali della distribuzione normale (3.9) sono riassunte dal grafico di fig. 13.

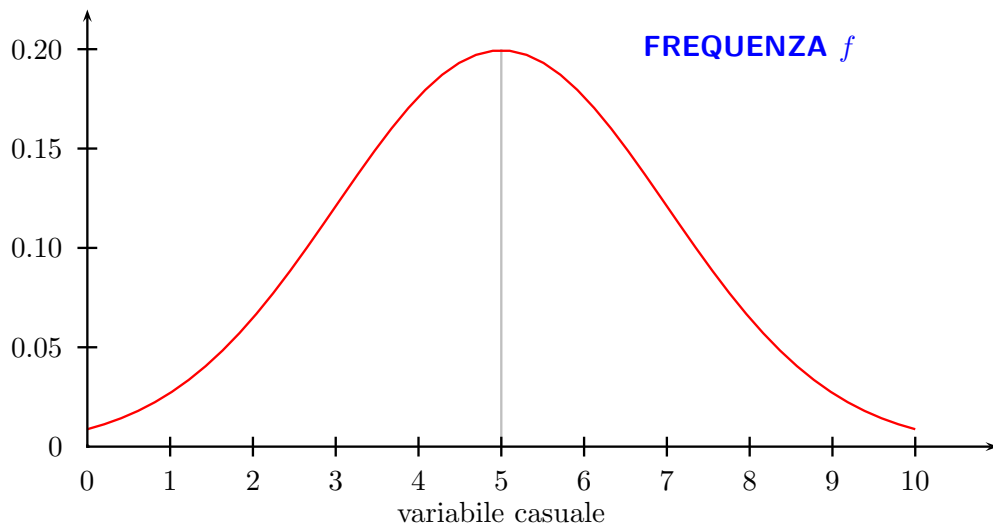


Fig. 13 Distribuzione gaussiana.

L'aspetto è quello di una campana, simmetrica rispetto alla retta $x = x_v$. Poiché $\mu > 0$ e l'esponente della (3.9) è pure, allora $f(x) > 0$ e la curva giace nel semipiano delle ordinate positive. Così, se $x \rightarrow \pm\infty$, $f(x) \rightarrow 0$ ossia

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0,$$

e perciò $f(x)$ si avvicina asintoticamente all'asse x che risulta il suo asintoto orizzontale. La curva raggiunge in $x = x_v$ il valore massimo

$$f(x) = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \quad (3.14)$$

che dipende da μ in modo inversamente proporzionale.

Se si considerano poi i punti aventi ascisse $x \pm \mu$, si ha che per

- a. $x_v - \mu < x < x_v + \mu$ il grafico di $f(x)$ ha la concavità rivolta verso il basso,
- b. $x < x_v - \mu$ e $x > x_v + \mu$ la concavità è rivolta verso l'alto:

$x = x_v \pm \mu$ sono cioè due punti di flesso. Sostituendo $x_v + \mu$ nell'espressione (3.9) si trova che l'ordinata di questi punti sta nel rapporto

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \approx \frac{3}{5}$$

con quella del massimo, il che significa che i punti di flesso stanno circa a $3/5$ dell'altezza totale. Con queste informazioni possiamo tracciare diverse "gaussiane" relative ciascuna a differenti valori di μ e al medesimo valor medio (fig. 14).

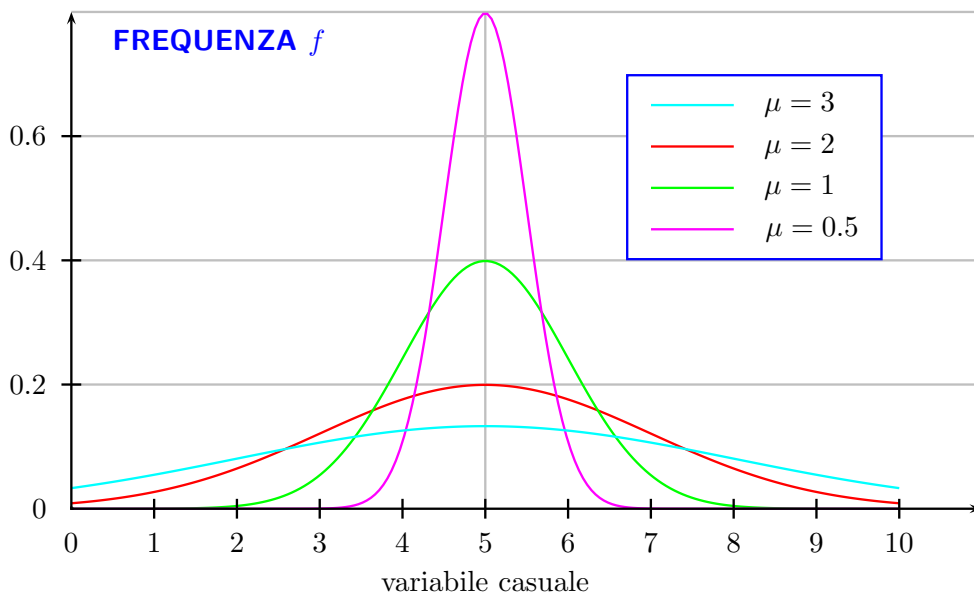


Fig. 14 Gaussiane relative a diversi valori di μ .

Per la (3.14) risulta evidente che al diminuire di μ la curva si contrae attorno al valor medio e si innalza. La dispersione dei valori attorno a x_v e quindi la precisione delle misure è in qualche modo rappresentata dallo scarto quadratico medio μ che per tale ragione è detto anche *indice di precisione*. Una gaussiana con μ "grande" cioè abbastanza larga sarà indice di una misura poco precisa, mentre al contrario se la distribuzione è molto addensata attorno al valor medio, μ è piccolo e la misura risulta molto precisa (vedi anche cap. 4.1).

Infine nella fig. 15 compaiono varie gaussiane relative a diversi valori medi. È immediato notare come questo parametro determini la posizione della curva sull'asse x tanto che, analogamente a quanto detto per gli istogrammi, si può ottenere la distribuzione teorica

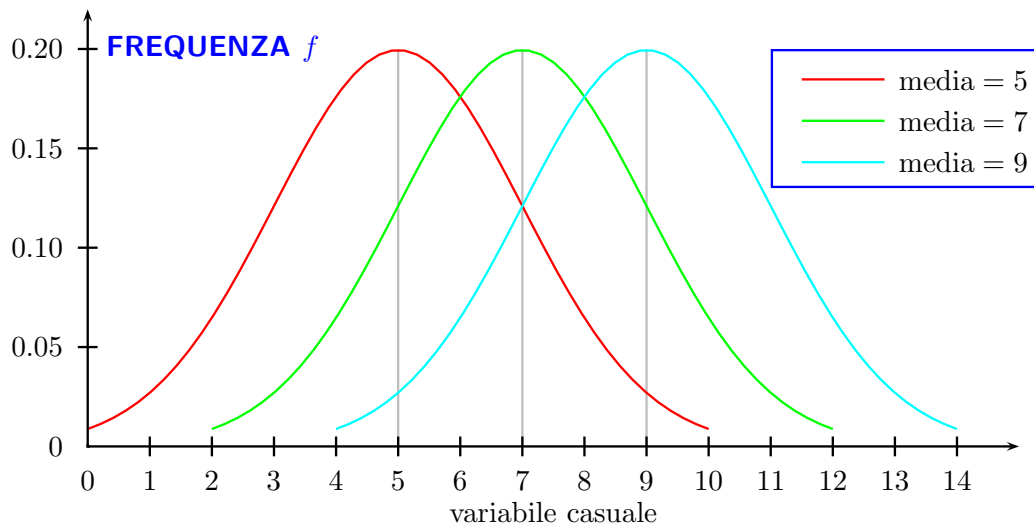


Fig. 15 Gaussian relative a diversi valori medi.

degli scarti attorno allo zero eseguendo nient'altro che la traslazione $x - x_v = z$. La (3.9) assume così la forma

$$f(z) = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2\mu^2}}. \quad (3.15)$$



CAPITOLO 4

4.1 Stima dello scarto quadratico medio

Lo scopo che ci proponiamo in questo capitolo è di tradurre le formule presentate nel precedente in espressioni che partendo dai dati sperimentali, forniscano delle stime dei parametri caratterizzanti la distribuzione gaussiana, così da poter confrontare i diversi istogrammi sperimentali con la curva di Gauss “generata” dalla serie di dati.

L'espressione (3.4) non è operativamente utilizzabile per due motivi: N è limitato e gli ϵ_i non sono noti in quanto è ignoto il valore vero x_v contenuto in essi (vedi sezione 3.3). D'altra parte abbiamo dimostrato che una buona stima di x_v risulta essere la media aritmetica \bar{x} da cui è possibile risalire agli scarti z_i (definiti dalla 3.5). Così l'errore di una singola misura è legato agli scarti dalla (3.7) che riscriviamo come

$$\epsilon_i = z_i + \bar{\epsilon}.$$

Quadrando

$$(\epsilon_i)^2 = (z_i + \bar{\epsilon})^2 = (z_i)^2 + \bar{\epsilon}^2 + 2\bar{\epsilon}z_i$$

e sommando ciascuno di questi errori (come sempre da 1 a N), otteniamo

$$\sum (\epsilon_i)^2 = \sum [(z_i)^2 + \bar{\epsilon}^2 + 2\bar{\epsilon}z_i] = \sum (z_i)^2 + N\bar{\epsilon}^2 + 2\bar{\epsilon} \cdot \sum z_i$$

poiché per la (3.8), $\sum z_i = 0$,

$$\sum (\epsilon_i)^2 = \sum (z_i)^2 + N\bar{\epsilon}^2$$

da cui dividendo per N

$$\frac{\sum (\epsilon_i)^2}{N} = \frac{\sum (z_i)^2}{N} + \bar{\epsilon}^2$$

cioè, ricordando la (3.12)

$$\mu^2 = \frac{\sum (z_i)^2}{N} + \bar{\epsilon}^2. \quad (4.1)$$

Questa fornisce lo scarto quadratico medio in funzione degli scarti e del quadrato dell'errore della media che risulta essere una grandezza ancora incognita (vedi 3.4, 3.7). Eseguendo il quadrato della (3.4) ed esplicitando le somme

$$\begin{aligned} (\bar{\epsilon})^2 &= \left[\frac{1}{N} \cdot \sum \epsilon_i \right]^2 = \frac{1}{N^2} \cdot \left[\sum \epsilon_i \right]^2 = \frac{1}{N^2} \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_N)^2 \\ &= \frac{1}{N^2} [(\epsilon_1)^2 + (\epsilon_2)^2 + \dots + (\epsilon_N)^2 + 2\epsilon_1\epsilon_2 + 2\epsilon_1\epsilon_3 + \dots] \end{aligned}$$

da cui

$$(\bar{\epsilon})^2 = \frac{1}{N^2} \left[\sum (\epsilon_i)^2 + (2\epsilon_1\epsilon_2 + 2\epsilon_1\epsilon_3 + \dots) \right].$$

Essendo gli ϵ_i sia positivi che negativi ed avendo quasi la medesima probabilità di manifestarsi in quanto la curva di Gauss è simmetrica, possiamo supporre che

$$2\epsilon_1\epsilon_2 + 2\epsilon_1\epsilon_3 + \dots \approx 0$$

per cui, sempre per la (3.12)

$$(\bar{\epsilon})^2 = \frac{1}{N^2} \cdot \sum (\epsilon_i)^2 = \frac{1}{N} \cdot \left[\frac{\sum (\epsilon_i)^2}{N} \right] = \frac{\mu^2}{N}. \quad (4.2)$$

Introdotta nella (4.1)

$$\mu^2 = \frac{\sum (z_i)^2}{N} + \frac{\mu^2}{N}$$

ed esplicitando μ , si ottiene

$$\mu^2 \left[1 - \frac{1}{N} \right] = \frac{\sum (z_i)^2}{N} \quad \text{cioè} \quad \mu^2 \left[\frac{N-1}{N} \right] = \frac{\sum (z_i)^2}{N} \quad \mu^2 = \frac{\sum (z_i)^2}{N-1}$$

che conduce alla fondamentale espressione

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum (z_i)^2}{N-1}}. \quad (4.3)$$

Le quantità che compaiono a secondo membro sono ora tutte note perché deducibili dai dati sperimentali.

Confrontando la (4.1) con il quadrato della (4.3), se N è preso sufficientemente grande, allora $N \approx N - 1$, $\bar{\epsilon} \approx 0$ e per la (3.7) $z_i \approx \epsilon_i$, per cui la differenza tra queste espressioni tende ad annullarsi.

Dalla (4.2) discende un'altra importante relazione. Se si calcola μ tramite la (4.3), l'errore della media di tutta la serie di misure, che si deduce estraendo la radice quadrata di (4.2), è espresso dalla

$$\sigma = \sqrt{\frac{\mu^2}{N}} = \frac{\mu}{\sqrt{N}} \quad (4.4)$$

o più esplicitamente, per la (4.3)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(z_i)^2}{N(N-1)}} \quad (4.5)$$

dove si è preferito introdurre il nuovo simbolo σ per distinguere l'espressione "nota" (4.5) dal valore incognito $\bar{\epsilon}$.

Chiameremo σ *errore (o scarto) quadratico medio della media* in quanto si può dimostrare che se si eseguono diverse serie di misure e si va a studiare la distribuzione dei valori medi ottenuti nell'ambito di ciascuna serie, questa è ancora un istogramma avente σ come scarto quadratico medio.

Per esempio, se i 100 dati della tabella 1 anziché ottenuti in un'unica serie, si fossero ottenuti in 10 diverse serie, si potrebbe studiare come si distribuiscono i valori medi di ciascuna (1-10, 11-20, ... 91-100). Questi formano l'istogramma di fig. 16 avente come errore quadratico medio σ (collegato allo scarto μ di ciascuna serie dalla 4.4).

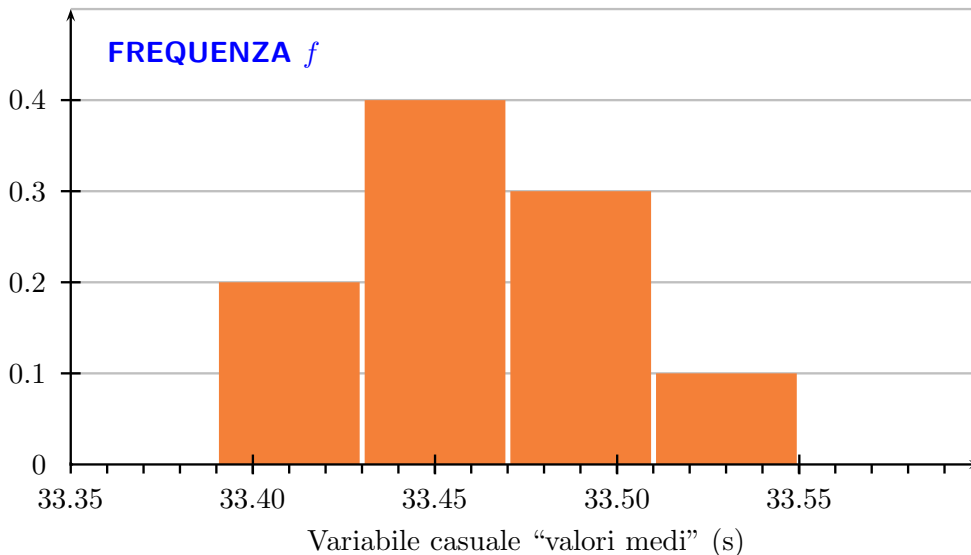


Fig. 16 Istogramma delle medie



CAPITOLO 5

5.1 Analisi dei dati sperimentali (I)

Siamo ora in grado di confrontare l'istogramma sperimentale ottenuto da un insieme di misure con la curva di Gauss "generata" da queste. A tal fine, è sufficiente:

- fissare nella (3.10) l'intervallo Δx , di valore identico a quello che è stato scelto per costruire l'istogramma,
- determinare in base alle (3.2) e (4.3) \bar{x} e μ ,
- sostituirli nella (3.9).

Per esempio, la serie rappresentata dalla tabella 1 implica

$$\bar{T} = 33,456 \text{ s} \quad \mu = 0,086 \text{ s}$$

per cui la distribuzione generata da queste stime e con $\Delta x = 0,01$, è espressa dalla

$$\frac{n(T)}{N} = \left\{ \frac{1}{0,086\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left[\frac{(T - 33,456)^2}{2 \cdot (0,086)^2}\right]} \right\} \cdot 0,01 \quad (5.1)$$

e possiede il grafico di fig. 17, dove si è riportato il corrispondente istogramma sperimentale di fig.7.

Cambiando nella (5.1) solo l'ampiezza dell'intervallo Δx si deducono per $\Delta x = 0,02$ s e $\Delta x = 0,03$ s rispettivamente i grafici delle figg. 18 e 19. Risulta pertanto immediato confrontare l'adattamento della curva all'istogramma e valutare se le misure hanno seguito una distribuzione normale.

È pure utile a questo punto mostrare come con pochi dati le distribuzioni sperimentali abbiano scarso contenuto informativo. Difatti, considerando i soli primi 10 dati della tabella 1, cioè supponendo di aver fatto solo 10 misure, si deducono da queste $\bar{x} = 33,40$ e $\mu = 0,097$ che, con $\Delta x = 0,05$, forniscono l'istogramma e la curva di Gauss di fig. 20. Tenendo presente la scala dell'asse verticale, risultano evidenti le notevoli fluttuazioni

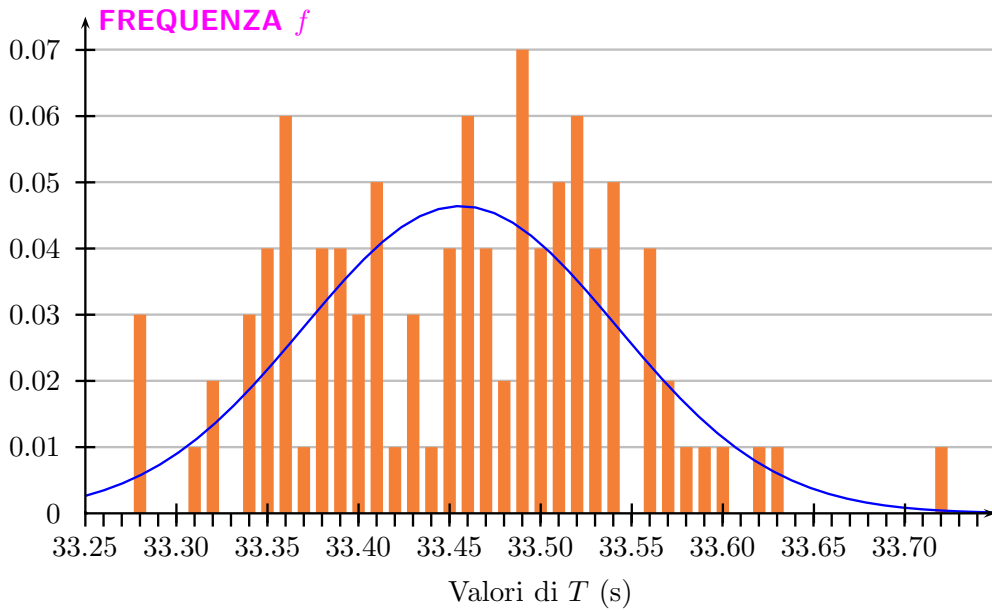


Fig. 17 Istogramma e relativa distribuzione $\Delta x = 0,01$ s.

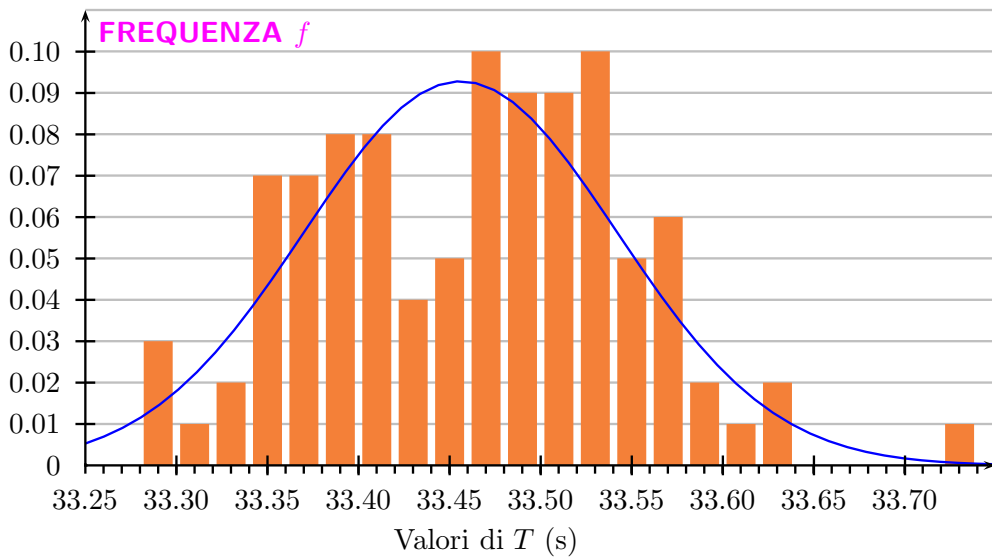


Fig. 18 Istogramma e relativa distribuzione $\Delta x = 0,02$ s.

rilevabili dal confronto tra l'istogramma e la gaussiana. Per quanto detto e visto, tali fluttuazioni diminuiscono all'aumentare di N .

In alternativa a questo metodo grafico è possibile verificare l'accordo delle due distribuzioni utilizzando la definizione di *errore medio*. Questo si definisce come

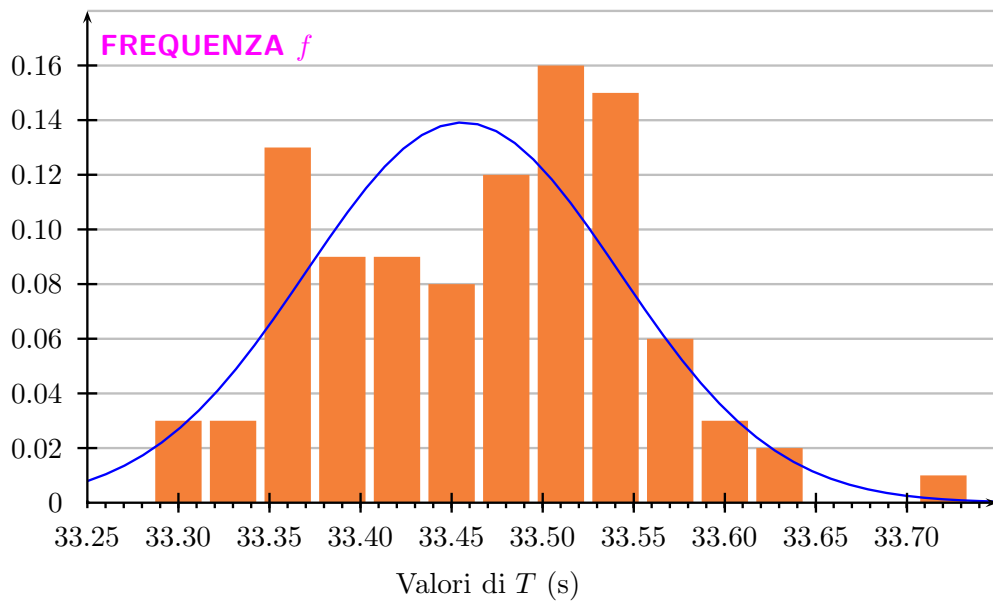


Fig. 19 Istogramma e relativa distribuzione $\Delta x = 0,03$ s.

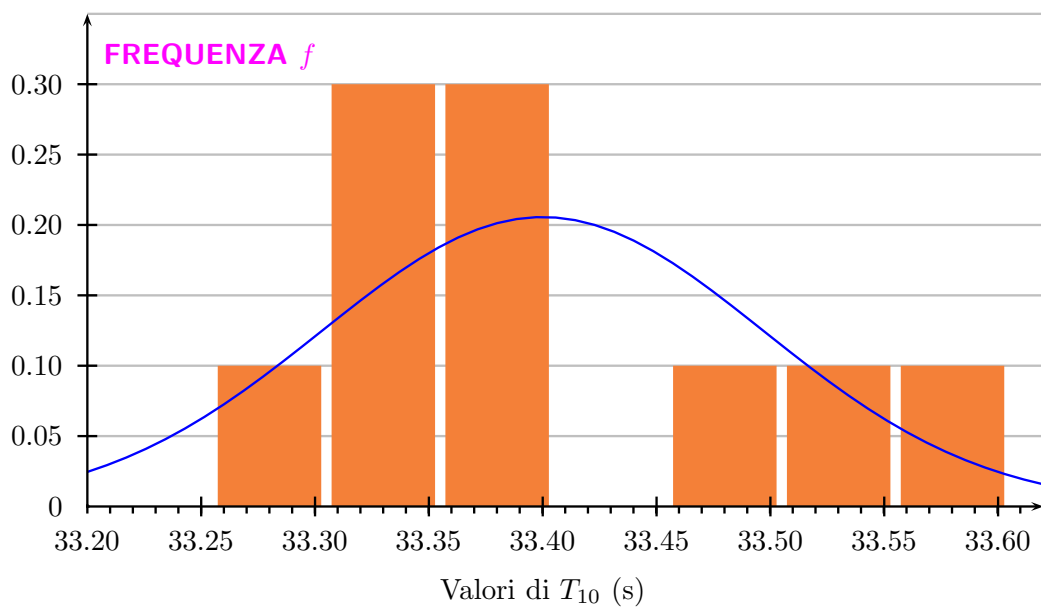


Fig. 20 Istogramma e distribuzione delle prime 10 misure.

$$a = \frac{\sum |\epsilon_i|}{N} = \frac{\sum |x_i - x_v|}{N}.$$

Se N è abbastanza grande una sua stima ottenuta in base ai dati sperimentali può essere

$$a = \frac{\sum |z_i|}{N} \quad (5.2)$$

e poiché nell'ambito della teoria accennata si può dimostrare che tra l'errore medio a e lo scarto quadratico medio sussiste la relazione

$$\frac{\mu}{a} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (5.3)$$

allora è sufficiente calcolare il rapporto μ/a in base ai dati e verificare la bontà dell'approssimazione al numero $\sqrt{\pi/2}$. Per esempio nel caso di $N = 100$ si ottiene $a = 0,070$ s che implica il valore

$$\left(\frac{\mu}{a}\right)_{\text{sper.}} = 1,23$$

in buon accordo con

$$\left(\frac{\mu}{a}\right) \approx 1,25.$$

Per le prime 10 misure invece

$$\left(\frac{\mu}{a}\right)_{\text{sper.}} = 0,95$$

che differisce sensibilmente dal valore aspettato di 1,25.

Altri metodi più elaborati (ad es. l'uso del "chi-quadro $<\chi^2>$ ") forniscono tests maggiormente significativi ma escono dai limiti di tale trattazione.*

5.2 Analisi dei dati (II)

Ricordando che l'area sottesa dalla curva di Gauss tra le rette $x = x_1$ e $x = x_2$ esprime la probabilità P che una misura x_i sia compresa tra questi due estremi (p. 23) cioè

$$P(x_1 \leq x_i \leq x_2)$$

diviene allora conveniente conoscere le seguenti probabilità (d'ora in poi sostituiamo a x_v, \bar{x})

$$P(\bar{x} - \mu \leq x_i \leq \bar{x} + \mu) \quad P(\bar{x} - 2\mu \leq x_i \leq \bar{x} + 2\mu) \quad P(\bar{x} - 3\mu \leq x_i \leq \bar{x} + 3\mu)$$

* Per la stima del χ^2 si vedano i testi: P. R. Bevington: *Data reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, M. Loretì: *Teoria degli Errori e fondamenti di Statistica*, M. Severi: *Introduzione alla Esperimentazione Fisica*.

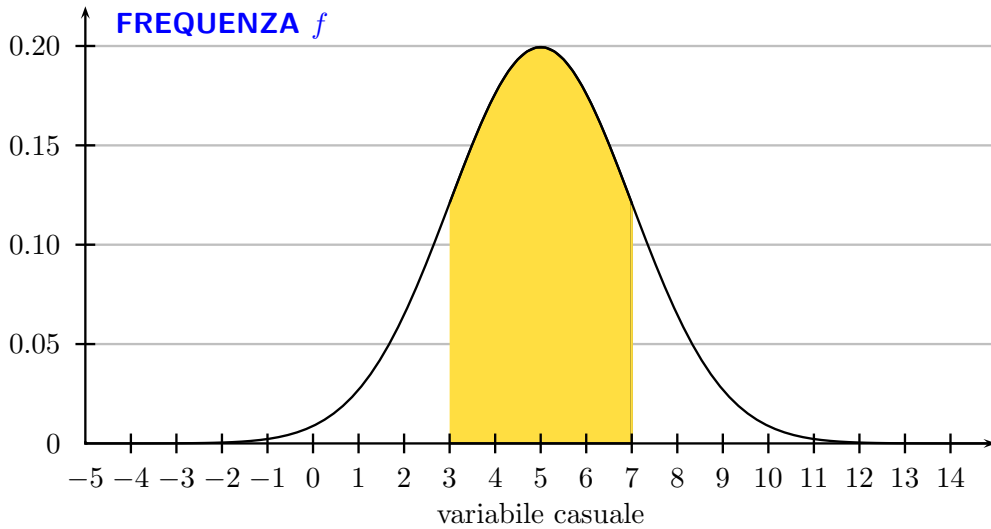


Fig. 21 Intervallo di semiampiezza 1μ ($\mu = 2$, $\bar{x} = 5$).

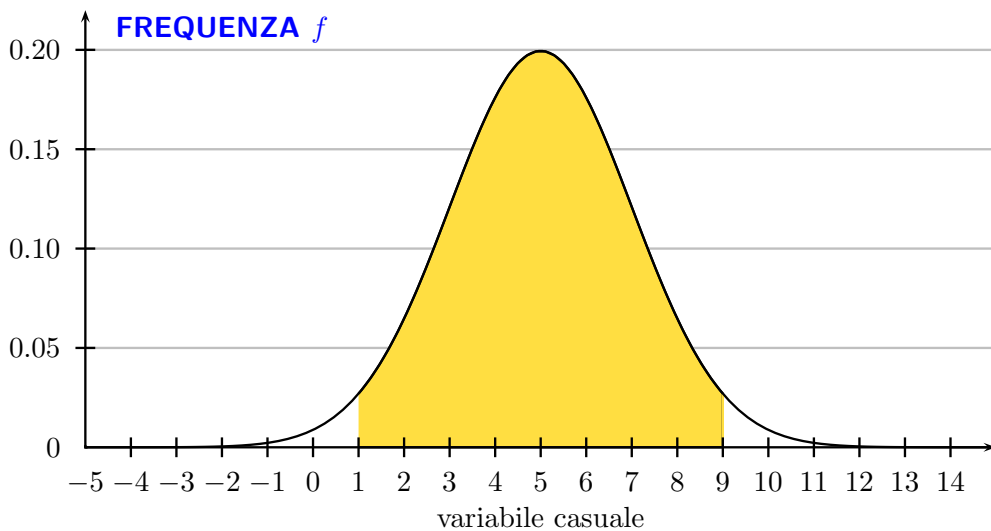


Fig. 22 Intervallo di semiampiezza 2μ ($\mu = 2$, $\bar{x} = 5$).

rispettivamente rappresentate dalle regioni delle figg. 21, 22, 23.

Si trova che

$$\begin{aligned}
 P(\bar{x} - \mu \leq x_i \leq \bar{x} + \mu) &= 0,6827 \\
 P(\bar{x} - 2\mu \leq x_i \leq \bar{x} + 2\mu) &= 0,9545 \\
 P(\bar{x} - 3\mu \leq x_i \leq \bar{x} + 3\mu) &= 0,9973
 \end{aligned}$$

Ciò significa che la probabilità di ottenere una misura interna all'intervallo $\bar{x} - \mu \leq x_i \leq \bar{x} + \mu$ ossia che differisca in valore assoluto dal valor medio per una quantità inferiore o

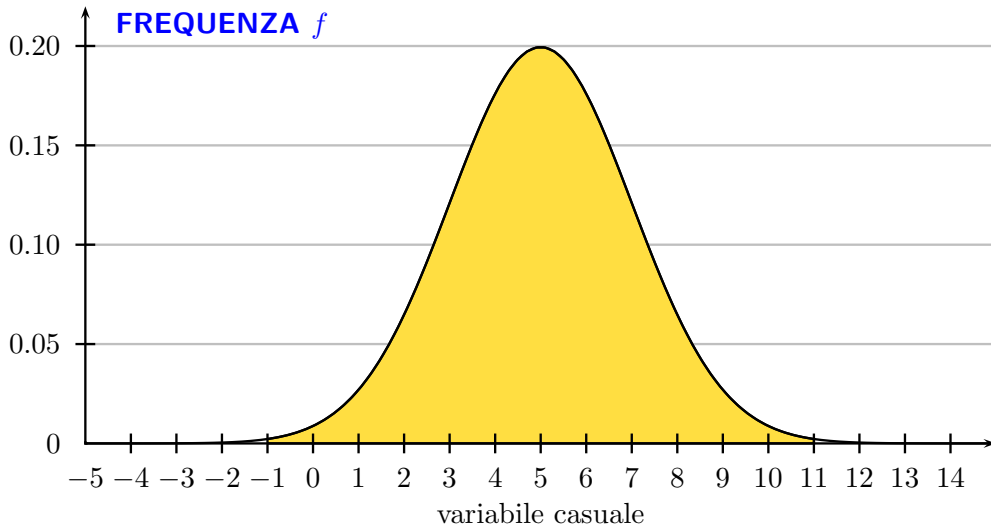


Fig. 23 Intervallo di semiampiezza 3μ ($\mu = 2$, $\bar{x} = 5$).

eguale allo scarto quadratico medio $|x_i - \bar{x}| \leq \mu$ (o analogamente $|z_i| \leq \mu$) è del 68%. Per lo stesso motivo, una misura cadrà nell'intervallo

$$[\bar{x} - 2\mu, \bar{x} + 2\mu] \quad \text{circa il 95\% delle volte } (|z_i| \leq 2\mu)$$

mentre in

$$[\bar{x} - 3\mu, \bar{x} + 3\mu] \quad \text{approssimativamente il 99,7\% } (|z_i| \leq 3\mu).$$

Da queste osservazioni comprendiamo come lo scarto quadratico medio *costituisca un parametro utile a definire l'attendibilità di una singola misura* e come fornisca un criterio per decidere se una data misura con un determinato scarto sia accettabile o meno.

Difatti se eseguiamo un numero limitato di misure la probabilità di ottenerne una con uno scarto maggiore di 3μ è decisamente trascurabile (0,3%), per cui se si presenta una tale eventualità possiamo supporre che una qualche causa ignota abbia influenzato la determinazione e quindi modificato le condizioni sperimentali (può essere, e spesso lo è, una distrazione dell'operatore). In tal senso la misura va scartata e necessariamente vanno ricalcolati \bar{x} e μ .

Analogamente potremo accettare solo le misure con scarto inferiore a 2μ e rifiutare quelle con scarto maggiore che hanno una probabilità di verificarsi solo del 5%.

Nell'esempio del pendolo, se scegliessimo di accettare i valori compresi nell'intervallo $\bar{x} - 2\mu \leq x \leq \bar{x} + 2\mu$ cioè $33,29 \leq x \leq 33,63$ allora andrebbero scartate 3 misure uguali a 33,28 e quella pari a 33,72.

In generale stabilita la regione di accettazione (fig. 24) in base a considerazioni sul numero N di misure eseguite e sul valore di μ , si elaborano definitivamente solo quei dati che vi sono compresi, calcolando per essi la nuova media e il nuovo scarto quadratico μ . Il

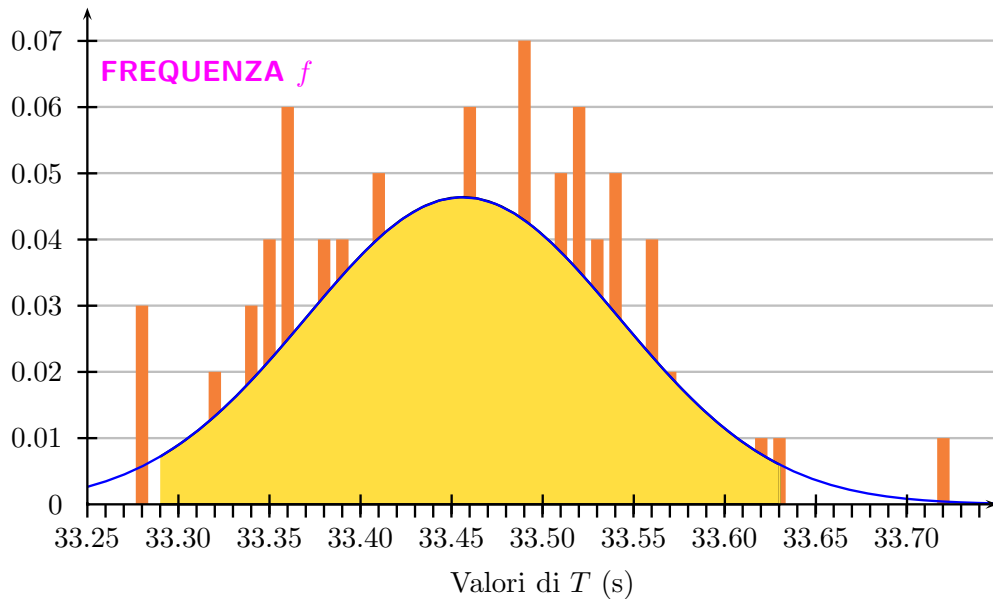


Fig. 24 Zona di accettazione: la semiampiezza è pari a 2μ .

numero totale delle misure sarà evidentemente quello che si ottiene trascurando quelle rifiutate.

È sulla base di queste considerazioni che si giustifica il modo di presentare il risultato di una serie di misure della grandezza x .

Sapendo che la miglior stima del valore vero è la media aritmetica \bar{x} , vorremmo ora conoscerne la sua attendibilità. Ricordando che σ (p. 29) rappresenta lo scarto quadratico medio della distribuzione dei valori medi ottenuti in diverse serie di misure e che, per le (4.4, 4.5), questo è noto anche senza effettivamente eseguire questo insieme (decisamente lungo!) di misure essendo sufficiente conoscere lo s.q.m. dell'unica serie realizzata, se riportiamo il risultato nella forma

$$x = \bar{x} \pm \sigma \quad (5.4)$$

significa affermare che la probabilità che l'intervallo

$$[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$$

contenga la media di una nuova serie di misure è del 68,27%. Di norma questo intervallo si considera quello entro il quale si ipotizza cada effettivamente il valore "vero" e viene detto *intervallo di attendibilità*. In corrispondenza si usa dire che x ha un *livello di confidenza del 68%*. Se invece si sceglie

$$x = \bar{x} \pm 2\sigma$$

evidentemente il livello di confidenza sale al 95%.

L'errore (o scarto) quadratico medio della media assume così un significato fondamentale in quanto collegato alla probabilità che ha il valor medio di differire dal valore vero della grandezza.

In base alla (4.4), poiché σ è \sqrt{N} volte minore di μ , possiamo concludere che il valor medio ha una precisione \sqrt{N} volte maggiore di quella della singola misura.



CAPITOLO 6

6.1 Propagazione degli errori statistici

Nella sezione 2.2 abbiamo discusso della propagazione degli errori massimi nel caso di misure indirette della grandezza fisica y , funzione delle ulteriori grandezze x_1, x_2, \dots, x_n , cioè

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

È necessario ora definire come l'indeterminazione associata a ciascuna x_1, x_2, \dots, x_n ed espressa dal relativo scarto quadratico medio $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, si propaga sulla y .

Riprendendo l'esempio di p. 12 sul calcolo dell'accelerazione di gravità tramite delle misure di tempo e di lunghezza, supponiamo di conoscere gli scarti quadratici medi del periodo μ_T , della lunghezza μ_l e, naturalmente, il periodo medio \bar{T} e la lunghezza media \bar{l} . È abbastanza evidente che la misura di g si otterrà sostituendo questi valori medi nella espressione

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

Ciò significa che in generale il valor medio di una grandezza $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, \bar{y} , si otterrà sostituendo alle grandezze x_1, x_2, \dots, x_n i rispettivi valori medi cioè

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n). \quad (6.1)$$

Il problema sta invece nel determinare lo scarto quadratico medio di y . Il caso più semplice della (6.1) è una dipendenza del tipo

$$y = kx$$

dove k è una costante nota esattamente. Si ha $\bar{y} = k\bar{x}$ e poiché

$$\mu_y = \sqrt{\frac{\sum (z_i)^2}{N-1}}$$

con $z_i = y_i - \bar{y}$, discende $z_i = kx_i - k\bar{x} = k(x_i - \bar{x})$ cioè

$$\mu_y = \sqrt{\frac{\sum k^2(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{k^2 \cdot \sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = |k| \cdot \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

che per la (4.3) si riduce alla

$$\mu_y = |k|\mu_x. \quad (6.2)$$

Se invece

$$y = x_1 \pm x_2$$

e $\bar{y} = \bar{x}_1 \pm \bar{x}_2$, si dimostra che

$$\mu_y = \sqrt{(\mu_{x_1})^2 + (\mu_{x_2})^2}. \quad (6.3)$$

Analogamente se compaiono 3 o più addendi

$$y = x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n$$

la (6.3) si generalizza nella

$$\mu_y = \sqrt{(\mu_{x_1})^2 + (\mu_{x_2})^2 + \dots + (\mu_{x_n})^2}. \quad (6.4)$$

Nel caso di un prodotto, la formula che si ottiene diviene più semplice se si definisce l'errore relativo (di origine statistica) della grandezza fisica y come il rapporto

$$\epsilon_r(y) = \frac{\mu_y}{\bar{y}}. \quad (6.5)$$

Si dimostra allora che se

$$y = (x_1)^\alpha \cdot (x_2)^\beta \cdot \dots \cdot (x_n)^\theta \quad (6.6)$$

si ha

$$\epsilon_r(\bar{y}) = \frac{\mu_y}{\bar{y}} = \sqrt{[\alpha \cdot \epsilon_r(x_1)]^2 + [\beta \cdot \epsilon_r(x_2)]^2 + \dots + [\theta \cdot \epsilon_r(x_n)]^2}. \quad (6.7)$$

Qualche esempio potrà chiarire l'uso di quest'ultima espressione. Se

$$y = \frac{x_1}{x_2} = (x_1)^1 \cdot (x_2)^{-1}$$

da cui

$$\frac{\mu_y}{\bar{y}} = \sqrt{\left(1 \cdot \frac{\mu_{x_1}}{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(-1 \cdot \frac{\mu_{x_2}}{\bar{x}_2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\mu_{x_1}}{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{x_2}}{\bar{x}_2}\right)^2}.$$

Così se

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2 \bar{l}}{T^2} = (4\pi^2) \cdot \bar{l} \cdot (\bar{T})^{-2}$$

abbiamo

$$\frac{\mu_g}{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{\mu_l}{\bar{l}}\right)^2 + \left(-2 \cdot \frac{\mu_T}{\bar{T}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\mu_l}{\bar{l}}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\mu_T}{\bar{T}}\right)^2}$$

da cui lo scarto quadratico medio della g

$$\mu_g = \bar{g} \cdot \sqrt{\left(\frac{\mu_l}{\bar{l}}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\mu_T}{\bar{T}}\right)^2}.$$

Le (6.4) e (6.7) offrono pertanto le leggi di propagazione degli errori per le dipendenze funzionali più semplici.

Capita spesso che, in una misura indiretta di y , alcune grandezze da cui questa dipende, siano caratterizzate da errori statistici ed altre da errori massimi. Per esempio nel calcolo di g la misura della lunghezza l del pendolo semplice è stata fatta una sola volta con un metro trovando

$$\bar{l} = (278,1 \pm 0,1) \text{ cm.}$$

L'errore $\Delta l = 0,1$ è pertanto un errore massimo. In tali casi la formula da utilizzare è quella degli errori massimi (2.20), (2.22) dove però gli errori di origine statistica sono stati opportunamente trasformati in errori massimi. Poiché la probabilità che un valore della grandezza x cada all'esterno di un intervallo centrato sul valore medio e di semiampiezza pari a $3\mu_x$ è trascurabile, si può identificare questo valore come l'errore massimo Δx cioè

$$\Delta x = 3\mu_x. \quad (6.8)$$

Siamo ora in grado di completare l'esposizione dei risultati del nostro esempio. Difatti ricordando che le misure della tabella 1 si riferiscono alla grandezza T_{10} , discende per il periodo di una oscillazione T

$$\bar{T}_{10} = 10 \cdot \bar{T} \quad \bar{T} = \frac{1}{10} \cdot \bar{T}_{10} \quad \bar{T} = \frac{33,456}{10} = 3,3456 \text{ s}$$

e in base alle (5.1) e (6.2) lo scarto quadratico di una oscillazione è

$$\mu_T = \frac{0,086}{10} = 0,0086 \text{ s,}$$

l'errore massimo che si deduce dalla (6.8)

$$\Delta T = 3 \cdot (0,0086) = 0,0258 \text{ s,}$$

per cui l'accelerazione media risulta

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2(278,1)}{(3,3456)^2} = 980,9 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

Dalla (2.22), assegnando al termine \bar{g} il valore medio trovato, discende

$$\Delta g = \bar{g} \cdot \left(2 \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta T}{T} \right) \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} &= 980,9 \left(\frac{0,1}{278,1} + 2 \frac{0,026}{3,3456} \right) \\ &= 980,9 [3,6 \times 10^{-4} + 1,6 \times 10^{-2}] = 15,6 \text{ cm/s}^2 \end{aligned} \quad (6.10)$$

che approssimiamo a 16. In definitiva risulta

$$g = (981 \pm 16) \text{ cm/s}^2.$$

L'utilità dell'errore relativo è abbastanza evidente se si osserva la struttura della (2.20) e della (6.7). Difatti è completamente inutile misurare con precisioni estreme e quindi con notevole impegno di tempo e di mezzi una certa grandezza fisica, quando l'errore relativo di un'altra risulta molto maggiore della prima. Per esempio nella (6.10), il maggiore dei due termini è quello relativo al periodo ed è perciò inutile cercare di spingere la misura della lunghezza a valori più precisi quando l'altro termine che contribuisce è circa 40 volte meno accurato. L'attenzione eventualmente va posta nel ridurre ulteriormente questa componente dell'errore.

In generale si cercherà di mantenere un certo equilibrio in modo che le varie componenti degli errori relativi siano confrontabili e compatibili con gli eventuali fattori moltiplicativi. È sulla base di tali considerazioni che nella (6.9) converrebbe misurare il periodo con una accuratezza maggiore: difatti questo dovrebbe avere un errore relativo 2 volte più piccolo di quello sulla lunghezza.

Concludiamo accennando pure all'*errore percentuale*. Questo è evidentemente definito come

$$\epsilon\% = 100 \cdot \epsilon_r \quad (6.11)$$

e ad esso si possono facilmente estendere le considerazioni fatte per ϵ_r .



CAPITOLO 7

7.1 Metodo dei minimi quadrati (regressione lineare)

Finora abbiamo affrontato i problemi connessi alla stima dei valori più probabili di una grandezza fisica x e della loro incertezza, supponendo che le condizioni sperimentali, per quanto possibile, non variassero durante il rilevamento dei dati. In caso contrario, abbiamo pure discusso sulla “necessità” di rifiutare la misura.

Capita molto spesso però di dover eseguire una serie di N misure di una grandezza y , funzione di un'altra quantità x , in modo tale che *ciascuna misura y_i è stata ottenuta in corrispondenza di un valore diverso x_i* . Si dispone perciò di un insieme di N coppie

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$$

di dati sperimentali. Per esempio le y_i potrebbero rappresentare gli spazi s_i percorsi da un carrello in un moto rettilineo uniforme e rilevati nei corrispondenti istanti $t_i \equiv x_i$, oppure le tensioni V_i misurate ai capi di una resistenza quando questa è attraversata dalla corrente I_i o ancora le pressioni P_i (o volumi V_i) di un gas assunte alle diverse temperature t_i .

In generale y sarà funzione di x e di un certo numero di parametri a, b, c, \dots

$$y = f(x, a, b, c, \dots) \quad (7.1)$$

che si suppongono indipendenti da x e da y e che *durante la raccolta dei dati rappresentano delle grandezze fisiche costanti*. Questo fatto differenzia sostanzialmente l'espressione sopra (7.1) da quelle simili (2.3) trattate nei paragrafi riguardanti la propagazione degli errori. Il problema che si vuole affrontare consiste nello *stimare nel miglior modo possibile questi parametri*.

Supponiamo perciò di disporre di una serie di N coppie di misure. In tal modo a ciascuna si può far corrispondere sul piano cartesiano di assi x e y il punto $P_i(x_i, y_i)$, (fig. 25), cosicchè abbiamo sul piano un certo insieme di punti, detto diagramma a dispersione. Se ci limitiamo allo studio di una relazione lineare tra y e x del tipo

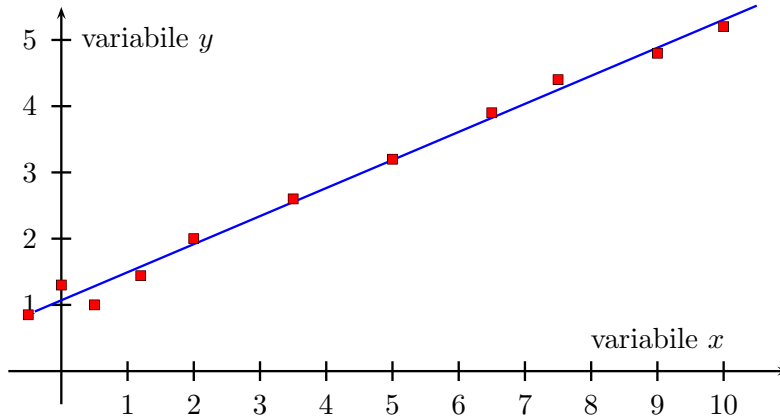


Fig. 25 Diagramma a dispersione per due grandezze fisiche e retta interpolante.

$$y = ax + b \quad (7.2)$$

allora ciò che dobbiamo determinare è la migliore stima di a e b , ossia determinare quella retta che approssima nel miglior modo possibile i dati sperimentali o, come si suol dire, quella che meglio interpola i dati. A tal fine dobbiamo definire univocamente un criterio per tale scelta.

Supponiamo di aver tracciato una retta $y = ax + b$ interpolante i dati di fig. 25. In corrispondenza di ciascun punto $P_i(x_i, y_i)$ è possibile determinare la distanza d_i dalla retta e questa è espressa dalla

$$d_i = \frac{|y_i - (ax_i + b)|}{\sqrt{1 + a^2}} \quad (7.3)$$

Se non si considera il valore assoluto si ha che $d_i > 0$ se il punto sta “sopra” la retta (ossia l’ordinata y_i è maggiore dell’ordinata del punto avente la medesima ascissa x_i ma appartenente alla retta) e $d_i < 0$ se P appartiene al semipiano inferiore. Allora, ad ogni possibile retta del piano si può associare un numero reale D ottenuto sommando tutti i valori d_i cioè

$$\begin{aligned} D &= \sum d_i = \sum \frac{y_i - (ax_i + b)}{\sqrt{1 + a^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \sum [y_i - (ax_i + b)]. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Per quanto già detto circa la media aritmetica, la retta che meglio interpola i dati dovrà mediamente assegnare la stessa importanza ai punti che appartengono ai semipiani opposti in cui è diviso il piano cartesiano per cui la somma delle distanze dei punti che

stanno nel semipiano superiore dev'essere uguale a quella ottenuta dai punti appartenenti all'altro semipiano. Ciò significa richiedere che la somma (7.4) valga zero

$$D = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \sum [y_i - (ax_i + b)] = 0$$

che implica

$$\sum [y_i - (ax_i + b)] = 0. \quad (7.5)$$

Questo risultato equivale alla richiesta che la somma delle differenze tra le ordinate dei punti ottenuti sperimentalmente y_i e quelli aventi la medesima ascissa ma appartenenti alla retta cercata, sia nulla.

D'altra parte questa condizione non assicura da sola la soluzione del problema in quanto vi compaiono 2 grandezze incognite a e b . Vi possono pertanto essere più rette che soddisfano alla (7.5) per cui va ricercata un'ulteriore restrizione. Se quindi, detta "deviazione" dell' i -esima misura la differenza

$$y_i - (ax_i + b)$$

consideriamo il suo quadrato

$$[y_i - (ax_i + b)]^2,$$

possiamo ritenere che questo fornisca una qualche "misura" dell'entità che separa la coppia di dati (x_i, y_i) dall'andamento ideale. Pertanto è ragionevole supporre che la retta cercata sarà tanto più prossima all'insieme dei dati sperimentali tanto più la somma dei quadrati delle singole deviazioni (che individueremo con S)

$$S = \sum [y_i - (ax_i + b)]^2 \quad (7.6)$$

sarà minima. La seconda condizione si ottiene perciò ricercando il valore minimo della quantità S (da ciò deriva il nome del metodo, noto come "metodo dei minimi quadrati").

Sviluppando il quadrato a secondo membro della (7.6)

$$\begin{aligned} S &= \sum (y_i - ax_i - b)^2 \\ &= \sum [(y_i)^2 + a^2(x_i)^2 + b^2 - 2ax_iy_i - 2by_i + 2abx_i] \end{aligned}$$

e, tenute presenti le proprietà associativa e distributiva

$$\begin{aligned} S &= \sum (y_i)^2 + \sum a^2(x_i)^2 + \sum b^2 - \sum 2ax_iy_i - \sum 2by_i + \sum 2abx_i \\ &= a^2 \sum (x_i)^2 - 2a \sum x_iy_i + 2ab \sum x_i + \sum (y_i)^2 - 2b \sum y_i + Nb^2 \end{aligned}$$

si ottiene

$$S = a^2 \sum (x_i)^2 - 2a \left[\sum x_i y_i - b \sum x_i \right] + \left(\sum (y_i)^2 - 2b \sum y_i + Nb^2 \right).$$

La relazione sopra evidenzia l'incognita a e possiede la forma tipica di una parabola ($y = ax^2 + bx + c$) nella variabile a . Poiché il coefficiente di a^2 risulta $\sum (x_i)^2 > 0$, S volge la concavità verso l'alto e il suo valore minimo è raggiunto in corrispondenza dell'ascissa del vertice ($x_V = -b/2a$) cioè

$$a = \frac{2 \left[\sum x_i y_i - b \sum x_i \right]}{2 \sum (x_i)^2} = \frac{\left[\sum x_i y_i - b \sum x_i \right]}{\sum (x_i)^2}.$$

Quest'ultima condizione, con la (7.5), costituisce il sistema

$$\begin{cases} \sum [y_i - (ax_i + b)] = 0 \\ a \sum (x_i)^2 = \sum x_i y_i - b \sum x_i \end{cases}$$

che permette la soluzione del problema. Difatti, riscrivendo la prima equazione come

$$\begin{aligned} \sum [y_i - (ax_i + b)] &= \sum y_i - a \sum x_i - \sum b \\ &= \sum y_i - a \sum x_i - Nb = 0 \end{aligned}$$

e la seconda in

$$\sum x_i y_i - a \sum (x_i)^2 - b \sum x_i = 0,$$

esplicitando dalla prima b

$$b = -\frac{a \sum x_i}{N} + \frac{\sum y_i}{N} \quad (7.7)$$

e sostituita nella seconda

$$\begin{aligned} \sum x_i y_i - a \sum (x_i)^2 - \left(-\frac{a \sum x_i}{N} + \frac{\sum y_i}{N} \right) \sum x_i &= 0 \\ \sum x_i y_i - a \sum (x_i)^2 + \frac{a (\sum x_i)^2}{N} - \frac{(\sum y_i)(\sum x_i)}{N} &= 0, \end{aligned}$$

moltiplicando per N

$$N \sum x_i y_i - a \left[N \sum (x_i)^2 - (\sum x_i)^2 \right] - (\sum y_i)(\sum x_i) = 0$$

da cui si può estrarre a

$$a = \frac{N \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{N \sum (x_i)^2 - (\sum x_i)^2}. \quad (7.8)$$

Sostituendo nella (7.7)

$$b = -\frac{N \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{N \sum (x_i)^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \frac{\sum x_i}{N} + \frac{\sum y_i}{N}$$

eseguendo il minimo comun denominatore

$$b = \frac{-N(\sum x_i y_i) \sum x_i + (\sum x_i)^2 (\sum y_i)}{N \cdot [N \sum (x_i)^2 - (\sum x_i)^2]} + \frac{N(\sum y_i) [\sum (x_i)^2] - (\sum y_i)(\sum x_i)^2}{N \cdot [N \sum (x_i)^2 - (\sum x_i)^2]}$$

discende

$$b = \frac{N[-(\sum x_i y_i) \sum x_i + (\sum y_i) \sum (x_i)^2]}{N \cdot [N \sum (x_i)^2 - (\sum x_i)^2]}$$

e in definitiva

$$b = \frac{(\sum y_i) \sum (x_i)^2 - (\sum x_i y_i) \sum x_i}{N \sum (x_i)^2 - (\sum x_i)^2}. \quad (7.9)$$

Le (7.8) e (7.9) costituiscono le espressioni fondamentali cercate. Con metodi che esulano dalla seguente trattazione è anche possibile stimare l'indeterminazione di a e b . Difatti nell'ipotesi che μ_y sia lo scarto quadratico medio comune di tutte le misure della variabile y e supposto trascurabile quello della variabile indipendente x , si dimostra* che lo scarto quadratico medio di a e b è

$$\mu_a = \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \cdot \mu_y \quad (7.10)$$

$$\mu_b = \sqrt{\frac{\sum (x_i)^2}{\Delta}} \cdot \mu_y \quad (7.11)$$

* Si veda G. Castelnuovo: *Calcolo delle probabilità*, e le già citate opere di P. R. Bevington, M. Severi e M. Loreti.

dove si è posto

$$\Delta = N \sum (x_i)^2 - \left(\sum x_i \right)^2.$$

7.2 Coefficiente di correlazione lineare

Le formule precedenti permettono di determinare in ogni caso la retta di regressione per un insieme di N coppie di valori $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$. D'altra parte può capitare che la distribuzione dei dati stessi non suggerisca alcuna correlazione oppure che una correlazione lineare tra le grandezze x e y sia troppo semplice e restrittiva: in questi casi tale procedimento non avrebbe motivo di essere applicato. Trascurando quei casi macroscopici dove un legame lineare viene escluso già in base a considerazioni tratte dall'evidenza grafica della dispersione delle coppie (x_i, y_i) sul relativo piano cartesiano (le misure non giacciono ragionevolmente vicino ad una retta), consideriamo come esempio un'eventualità più dubbia e problematica.

Tabella 2

N	tempo s	spazio cm	tempo ² s ²	N	tempo s	spazio cm	tempo ² s ²
1	1,57	20	2,46	6	2,36	45	5,57
2	1,75	25	3,06	7	2,49	50	6,20
3	1,91	30	3,65	8	2,62	55	6,86
4	2,07	35	4,28	9	2,74	60	7,51
5	2,22	40	4,93	10	2,86	65	8,18

La tabella 2 riassume una serie di misure degli spazi percorsi da un carrello su rotaia a cuscino d'aria e i tempi impiegati a percorrerli. Il carrello, collegato tramite un filo sottile ad un pesetto, veniva trainato da questo con partenza da fermo. Disponendo in ascissa i tempi (t_i) e in ordinata gli spazi (y_i) (consideriamo trascurabili gli errori sulla misura del tempo), si ottiene il diagramma di fig. 26.

Conoscendo le leggi del moto uniformemente accelerato valide in questo caso, (e quindi usando l'esperienza come una conferma di nozioni già note) un legame lineare tra y e t va escluso mentre risulta corretto quello quadratico cioè $y = (1/2)at^2$. Inversamente, se la legge dev'essere indotta dai dati sperimentali, c'è la necessità di valutare quale dei due andamenti (o altri più complicati eventualmente ipotizzabili) spieghi nel modo migliore la distribuzione osservata.

In definitiva si vuole chiarire se

- le variazioni della grandezza y siano o meno correlate con quelle della quantità x ,
- due grandezze siano legate da una relazione lineare.

Per quanto discusso nella precedente sezione se la quantità y è linearmente dipendente dalla grandezza x cioè entrambe soddisfano alla

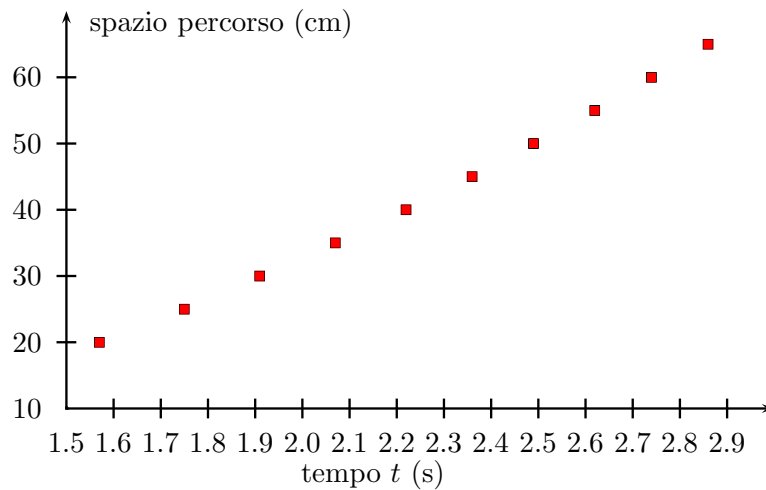


Fig. 26 Spazio in funzione del tempo in un moto uniformemente accelerato.

$$y = ax + b, \quad (7.12)$$

allora il coefficiente angolare a è dato dalla (7.8) e il termine noto b dalla (7.9). Se non ci fosse alcuna correlazione tra y e x allora i valori di y non dovrebbero mostrare alcuna tendenza ad aumentare o a diminuire all'aumentare di x . La quantità y pertanto dovrebbe rimanere costante al variare di x ossia il coefficiente angolare a della (7.12) dovrebbe essere nullo e la retta dei minimi quadrati sarebbe parallela all'asse delle x . A prima vista quindi il termine a potrebbe fornire un'indicatore del grado di correlazione, a costo comunque di rinunciare a discriminare quelle correlazioni dove il termine stesso è prossimo allo zero. D'altra parte, così come abbiamo ipotizzato un legame del tipo (7.12) è possibile considerare che il legame tra i dati sia del tipo

$$x = a'y + b', \quad (7.13)$$

e, nell'ipotesi di variabili correlate, i valori a , a' , e b , b' saranno in relazione uno con l'altro.

Difatti nel caso di una correlazione lineare esatta la (7.13) si riscrive come

$$y = \frac{1}{a'}x - \frac{b'}{a'}, \quad (7.14)$$

per cui confrontata con (7.12) implica

$$a = \frac{1}{a'} \quad b = -\frac{b'}{a'} \quad (7.15)$$

da cui discende che

$$aa' = 1. \quad (7.16)$$

Nel caso opposto di nessuna correlazione, le osservazioni precedenti rimangono valide e risulta

$$a = a' = 0 \quad \text{ossia} \quad aa' = 0.$$

Ne segue che il prodotto aa' fornisce un parametro adeguato alla stima del grado di correlazione, pertanto, poiché dalla (7.13) in modo del tutto analogo e simmetrico a quanto fatto precedentemente discende

$$a' = \frac{N \sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right) \left(\sum y_i\right)}{N \sum (y_i)^2 - \left(\sum y_i\right)^2}, \quad (7.17)$$

si può definire come *coefficiente di correlazione lineare* r il termine

$$r = \frac{N \sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right) \left(\sum y_i\right)}{\sqrt{N \sum (x_i)^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \cdot \sqrt{N \sum (y_i)^2 - \left(\sum y_i\right)^2}} \quad (7.18)$$

dove, anziché il prodotto aa' si è preferito considerare la sua radice quadrata. In tal caso i valori di r appartengono all'intervallo $[-1, +1]$ e se

1. $r \approx 0$ allora i punti non sono correlati e non mostrano alcuna tendenza a disporsi in prossimità di una retta,
2. $r \approx +1$ oppure $r \approx -1$, le coppie di misure suggeriscono una interpolazione lineare.

Va pure notato che il segno di r è il medesimo di quello di a e a' anche se, per quanto esposto, le informazioni principali si ottengono osservando quanto il valore assoluto di r si avvicina a 1.

Conviene infine ribadire i limiti di quanto esposto e cioè come le nozioni presentate siano solo una introduzione intuitiva ai minimi quadrati. Difatti la sola deduzione formale delle formule richiede conoscenze specifiche di Analisi Matematica (derivate parziali, dovendo determinare le condizioni sotto le quali la somma di quadrati $\sum [y_i - (ax_i + b)]^2$ possiede il valore minimo) che esulano dai programmi tradizionali delle scuole superiori. Analogamente ulteriori possibili considerazioni sulla probabilità che un certo insieme di misure conduca a valori di r maggiori o eguali a quanto determinato sperimentalmente tramite la (7.18) esulano dallo scopo di tali note, in quanto richiedono approfondite conoscenze di Statistica.

7.3 Esempi

Diamo qualche esempio sull'uso delle relazioni definite nei precedenti due paragrafi.

ESEMPIO 1.

In un moto rettilineo uniforme di un carrello su una rotaia a cuscinio d'aria si sono ottenute le seguenti (tabella 3) coppie di dati.

Tabella 3

N	tempo s	spazio cm	N	tempo s	spazio cm
1	0,09	5	6	0,56	30
2	0,19	10	7	0,66	35
3	0,28	15	8	0,75	40
4	0,38	20	9	0,84	45
5	0,47	25	10	0,93	50

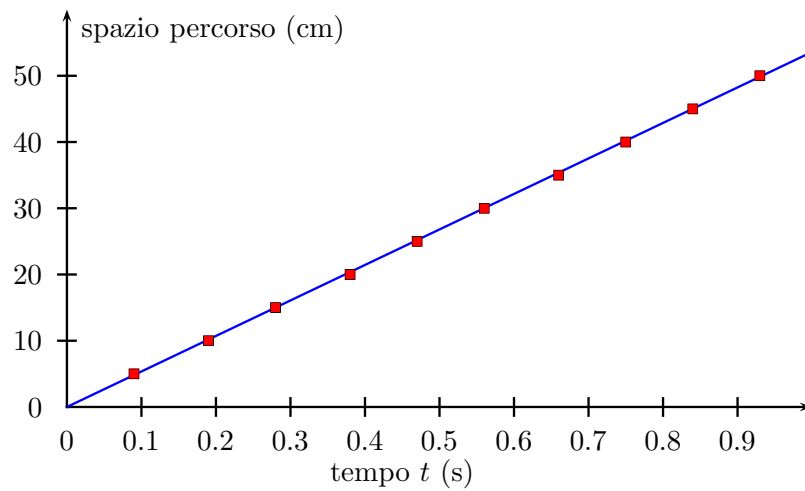


Fig. 27 Spazio percorso in funzione del tempo in un moto rettilineo uniforme.

Riportando in ascissa il tempo t e in ordinata lo spazio y , l'insieme dei punti rappresentativi (fig. 27) suggerisce, anche visivamente, una correlazione di tipo lineare: dalla teoria è $y = vt$. Se quindi, in base alla (7.8) si calcola la velocità v si trova

$$v = 53,6 \text{ cm/s.}$$

Considerando l'errore sul posizionamento dei due traguardi ottici pari a $\mu_y = 0,1 \text{ cm}$ e ritenuto trascurabile quello sul tempo, la (7.10) fornisce

$$\mu_v = 0,1 \text{ cm/s.}$$

Il calcolo del coefficiente di correlazione conduce al risultato

$$r = 0,9999$$

che conferma, con il suo valore prossimo ad 1, l'ottima correlazione lineare dei dati. La velocità di tale moto uniforme è quindi $v = (53,6 \pm 0,1)$ cm/s.

ESEMPIO 2.

In una serie di misure di tensione V e corrente I attraverso una resistenza R incognita si sono ottenuti i dati della tabella 4 e riportati nel grafico di fig. 28.

Tabella 4

N	tensione V	corrente A	N	tensione V	corrente A
1	0,2	0,2	9	2	1,97
2	0,4	0,34	10	2,5	2,49
3	0,5	0,48	11	2,8	2,81
4	0,6	0,58	12	3	2,98
5	0,8	0,75	13	3,5	3,48
6	1	0,89	14	3,8	3,79
7	1,2	1,2	15	4	4
8	1,5	1,49			

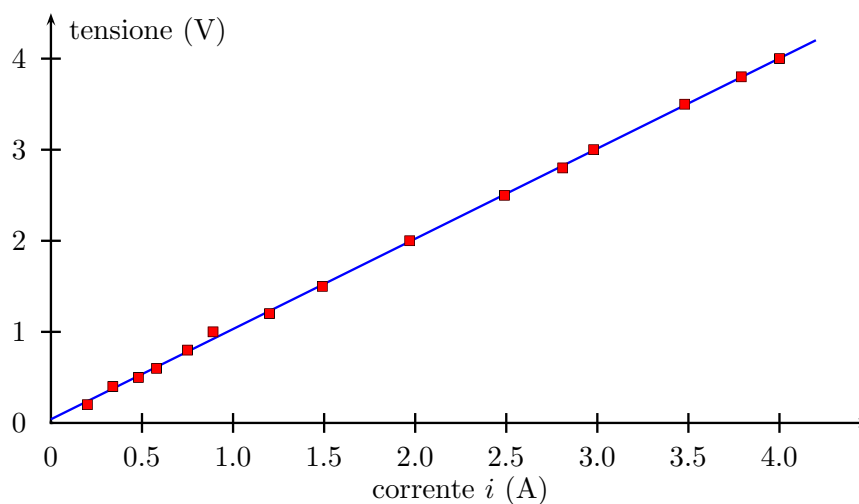


Fig. 28 Misure di corrente e tensione attraverso una resistenza.

La teoria afferma che $V = RI$: possiamo perciò in base al metodo dei minimi quadrati determinare R utilizzando la (7.8), dove le x_i corrispondono alle misure di corrente e le y_i a quelle di tensione. Si trova

$$R = 0,99 \Omega$$

Lo scarto quadratico medio di R si ottiene dalla (7.10), supposti trascurabili gli errori sulla corrente e identificando μ_V con l'errore di sensibilità del voltmetro ($\mu_V = 0,05$ volt), per cui

$$\mu_R = 0,044 \Omega.$$

Il coefficiente di correlazione risulta

$$r = 0,9998$$

e ciò conferma come una correlazione di tipo lineare sia ben seguita dai dati. In definitiva si ha

$$R = (0,99 \pm 0,04) \Omega.$$

ESEMPIO 3

Riprendiamo l'esempio introduttivo del paragrafo 7.2 e basato sulla tabella 2 di dati. Se si suppone una interpolazione lineare dei dati della forma $y = v_m t + y_0$ con v_m interpretata come velocità media, e fissato un errore sulla posizione y di $\mu_y = 0,1$ cm, si ottiene

$$v_m = 34,97 \text{ cm/s}$$

$$\mu_{v_m} = 0,08 \text{ cm/s}$$

$$r = 0,9978.$$

D'altra parte sappiamo che l'andamento lineare non è quello corretto in questo caso e che la teoria svolta finora non permette di stabilire direttamente l'adattamento tra la corretta legge quadratica $y = (1/2)at^2$ e i dati. In tal caso comunque è possibile con opportune posizioni "linearizzare" la dipendenza funzionale in modo tale da poter applicare il metodo esposto. Se quindi si pone la grandezza in ascissa pari a $x \equiv t^2$ (si veda la tabella 2 e la fig. 29), la legge quadratica assume una forma lineare $y = (1/2)ax$ e la nuova interpretazione implica i risultati

$$a = 15,71 \text{ cm/s}^2$$

$$\mu_a = 0,03 \text{ cm/s}^2$$

$$r = 0,9999.$$

Emerge con evidenza come tale linearizzazione porti ad un coefficiente r molto prossimo ad 1 e quindi come l'andamento quadratico sia preferibile ad uno lineare.

ESEMPIO 4.

Infine, nello studio sperimentale della legge di Boyle si sono rilevati i seguenti valori (tabella 5) per il volume V e la pressione P di un gas mantenuto a temperatura costante.

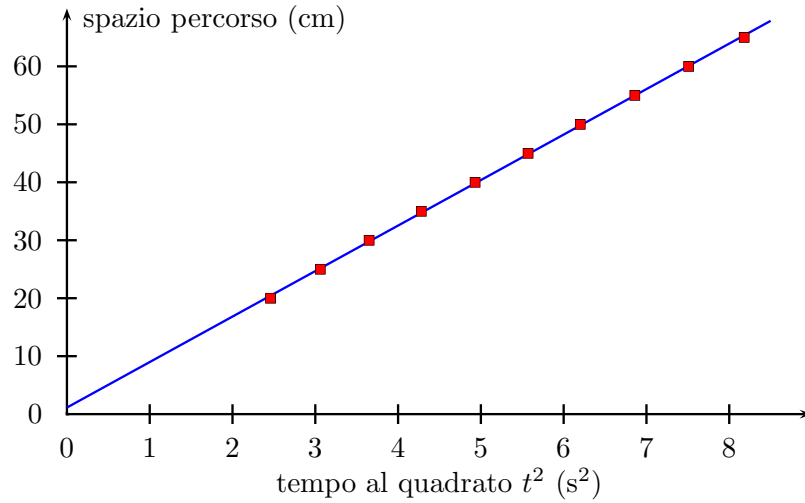


Fig. 29 Linearizzazione della dipendenza quadratica.

Tabella 5

N	volume 10^{-6} m^3	pressione 10^5 Pa	N	volume 10^{-6} m^3	pressione 10^5 Pa
1	10,7	1,07	6	7,63	1,50
2	10,2	1,12	7	7,04	1,63
3	9,36	1,22	8	6,75	1,70
4	8,57	1,33	9	6,30	1,80
5	8,11	1,41	10	5,67	2,00

Poiché la dipendenza funzionale corretta è del tipo $PV = K$ con K costante, la teoria svolta ancora non è applicabile. È comunque possibile una linearizzazione di tale dipendenza se si definisce la nuova variabile $y \equiv 1/V$. La legge diviene pertanto $y = (1/K)P$ e se, per motivi connessi alle caratteristiche dell'apparato sperimentale usato, si assegna $\mu_P = 150 \text{ Pa}$, si trova

$$K = 1,129 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3$$

$$\mu_K = 0,002 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3$$

$$r = 0,9997.$$

Anche in tal caso r è prossimo ad 1 per cui la dipendenza ipotizzata risulta sufficientemente giustificata. La fig. 30 esprime la distribuzione dei dati e la loro proporzionalità inversa (con riferimento al sistema di assi (P, V)), mentre la fig. 31 rappresenta i dati linearizzati nel sistema di assi $(P, 1/V)$.

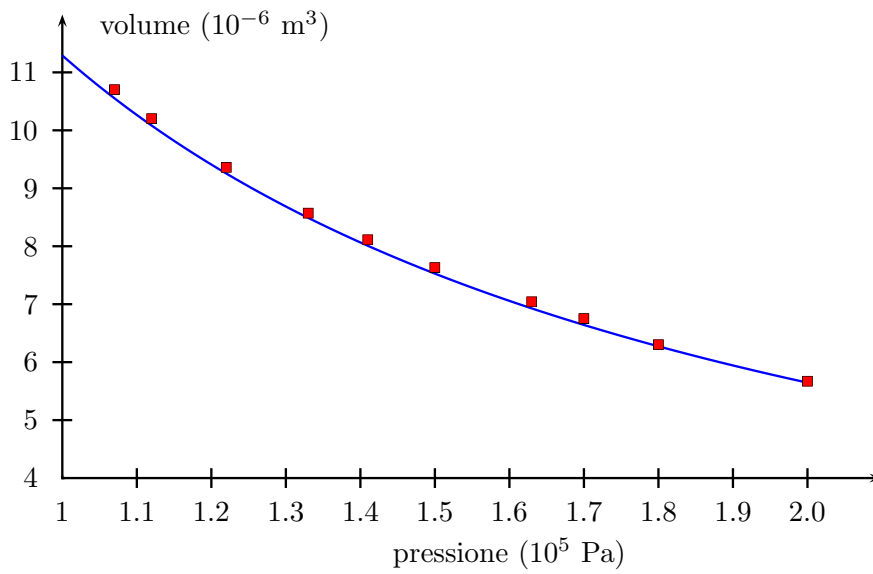


Fig. 30 Proporzionalità inversa della pressione e del volume.

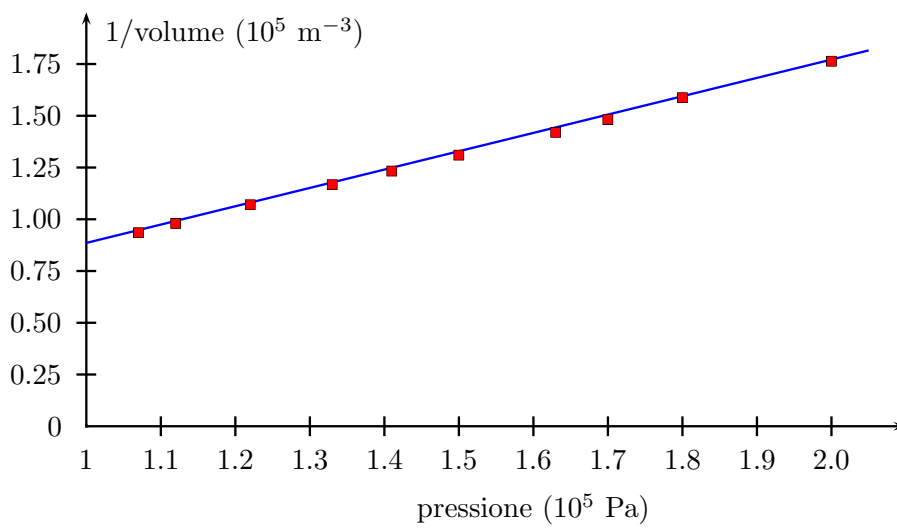


Fig. 31 Linearizzazione della relazione inversa tra pressione e volume.



CAPITOLO 8

8.1 Cifre significative

Abbiamo visto nei capitoli precedenti come ogni misura sia affetta da un errore e come sia possibile sviluppare dei metodi per “misurare” questa indeterminazione.

Esprimere pertanto la misura di una grandezza fisica con un numero arbitrariamente grande di cifre, non solo complicherebbe inutilmente le cose ma soprattutto significherebbe considerare nulla l'indeterminazione che, come detto, le è sempre associata. Anche per gli errori e per gli stessi motivi, risulta scorretto esprimere la loro entità con un numero eccessivo di cifre, tanto più se si tiene presente il significato probabilistico che è stato loro assegnato.

Pertanto, supponendo di aver misurato la durata T di un certo fenomeno e di aver trovato un risultato affetto dall'errore di

$$\Delta T = 0,01 \text{ s,}$$

risulta scorretto voler esprimere la misura di T con un numero di cifre superiori a quelle permesse dall'indeterminazione di un centesimo di secondo, così come non è esatto indicare un numero inferiore.

Esemplificando ulteriormente, sia

$$T = 13,2 \text{ s}$$

che

$$T = 13,274582 \text{ s,}$$

sono scritte non accettabili in quanto la prima, non indicando la cifra corrispondente ai centesimi è insufficiente nel contenuto informativo, e la seconda propone cifre prive di significato (pura fantasia!).

Nell'esprimere quindi una misura è necessario riportare il risultato con un numero di cifre corrispondente alla entità dell'errore, ossia alla precisione effettivamente ottenuta. A tale scopo, si conviene di scrivere l'errore con *non più di due cifre significative* e la misura, con un numero di cifre tale che, la cifra relativa alla potenza minore di 10 (cioè quella che si scrive più a destra) abbia lo stesso esponente di quella che le corrisponde nell'errore. In altre parole, *la misura dovrà avere un numero di cifre tale che quella scritta più a destra occupi lo stesso posto, rispetto alla virgola, di quella che sta più a destra nell'errore.*

Nell'esempio precedente si dovrà scrivere

$$T = (13,27 \pm 0,01) \text{ s}$$

in quanto le cifre, 1 nell'errore, e 7 nella misura, sono relative alla medesima potenza (-2) di 10 (le altre non hanno significato). In tal modo si potrà scrivere

$$m = (423,2 \pm 0,3) \text{ g}$$

ma non

$$m = (423,20 \pm 0,3) \text{ g}$$

essendo la cifra 0 della misura relativa alla potenza -2 di 10, mentre la cifra 3 dell'errore corrisponde all'esponente -1 .

In tal modo anche gli zeri dopo la virgola hanno un preciso significato, tanto più rilevante se si tiene presente che spesso viene sottintesa l'indicazione dell'errore. In questi casi si conviene di considerare l'errore uguale all'unità sull'ultima cifra scritta. Ne segue che le affermazioni

$$T_1 = 24,8 \text{ s} \quad T_2 = 24,80 \text{ s}$$

possiedono un significato sostanzialmente diverso, essendo di 0,1 l'errore su T_1 e di 0,01 su T_2 . Esplicitamente queste corrispondono alle scritture

$$T_1 = (24,8 \pm 0,1) \text{ s} \quad T_2 = (24,80 \pm 0,01) \text{ s}$$

In generale, determinato (con una o due cifre significative) l'errore da assegnare alla misura (ottenuta direttamente o più spesso indirettamente tramite il calcolo) si eliminano le cifre eccedenti seguendo la convenzione esposta sopra ma lasciando come ultima quella che si avvicina maggiormente a quelle tolte. Per esempio se $\Delta x = 0,003$ e la corrispondente misura è $x = 6,257369$ (in questo caso, visto il numero di cifre decimali, significa che è stata calcolata e non ottenuta direttamente), dovremo mantenere tre cifre decimali ma essendo la quarta un 3 che è < 5 , allora si scriverà

$$x = 6,257 \pm 0,003$$

mentre se fosse stato $x = 7,231737$, si sarebbe scritto

$$x = 7,232 \pm 0,003$$

in quanto $7 > 5$.

Da questi esempi e dalle elaborazioni presentate nei capitoli precedenti, si comprende come il risultato di una misura o di una serie di misure possa (ma non sempre lo è, per motivi di maggior immediatezza) assumere la forma generale

$$x = (x, x_1 x_2 x_3 \dots x_{n-1} x_n \pm e) \times 10^k \text{ u}$$

dove x è una cifra diversa da zero, $x_1 x_2 x_3 \dots x_{n-1} x_n$ rappresentano le eventuali cifre decimali della misura, ed e l'errore che si scrive come

$$e = 0,00 \dots 0 e_{n-1} e_n,$$

scrittura che evidenzia le cifre decimali incerte, la $(n - 1)$ -esima e la n -esima.

Il fattore 10^k con $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ costituisce il termine caratteristico della notazione scientifica, spesso conveniente quando il numero è molto grande o molto piccolo e permette di riconoscere immediatamente l'ordine di grandezza k della misura. Infine 'u' rappresenta l'unità di misura e le $n + 1$ cifre (la x più le n cifre decimali) rappresentano le *cifre significative* della misura.

Seguendo questa notazione l'accelerazione di gravità g ottenuta a p.41 va scritta

$$g = (9,81 \pm 0,16) \times 10^2 \text{ cm/s}^2$$

o anche

$$g = (9,81 \pm 0,16) \text{ m/s}^2.$$

Analogamente, le grandezze discusse negli esempi del capitolo precedente, vanno riportate come

$$\begin{aligned} v &= (5,36 \pm 0,01) \times 10^1 \text{ cm/s}, \\ R &= (9,9 \pm 0,4) \times 10^{-1} \Omega, \\ a &= (1,571 \pm 0,003) \times 10^1 \text{ cm/s}^2, \\ K &= (1,129 \pm 0,002) \text{ Pa} \cdot \text{m}^3. \end{aligned}$$

8.2 Media pesata

Vogliamo infine affrontare il problema della stima di una certa grandezza fisica x , relativa allo stesso fenomeno, e della quale disponiamo di un certo numero di misure x_i , ottenute però in contesti diversi e indipendenti e quindi ciascuna affetta da un diverso errore statistico ossia da un diverso scarto quadratico medio della media σ_i . Si vuole pertanto

combinare le diverse determinazioni in modo tale che ciascuna misura sia opportunamente “pesata” così da ottenere una migliore stima per la grandezza in oggetto.

Una tale esigenza si presenta quando i risultati che vogliamo elaborare provengono da fonti diverse, ciascuna delle quali ha misurato la medesima grandezza con propria strumentazione e metodi. È evidente che eliminare semplicemente le stime peggiori e quindi usare solo quella con lo scarto quadratico medio minore verrebbe ad essere una procedura del tutto arbitraria che disperderebbe il contenuto informativo associato a ciascuna misura.

D'altra parte se una misura presenta rilevanti differenze rispetto a tutte le altre si può sospettare che questa sia affetta da qualche tipo di errore sistematico non emerso durante il processo di misura: in tal caso viene a mancare la consistenza di questa con il restante insieme di dati ed è quindi legittimo escludere tale determinazione. L'esempio seguente vuole sottolineare come tale procedura talvolta si renda necessaria.

In una classe di 24 studenti si è misurata l'accelerazione di gravità g in base alla durata delle oscillazioni di un pendolo semplice. Ciascun studente disponeva di un diverso pendolo e, indipendentemente dai compagni, ha rilevato la lunghezza e il periodo. Il risultato dell'elaborazione di ciascuno (media e σ) è riportato in tabella 6 e in figura 32.

Tabella 6

N	gravità cm/s ²	σ cm/s ²	N	gravità cm/s ²	σ cm/s ²
1	978	22	13	987	18
2	971	14	14	981	16
3	977	12	15	968	22
4	974	24	16	919	24
5	980	22	17	989	26
6	979	5	18	981	11
7	1093	64	19	996	19
8	992	21	20	979	14
9	982	8	21	971	14
10	979	14	22	987	11
11	964	7	23	983	21
12	980	12	24	981	21

Appare evidente che le misure numero 7 e 16 possiedono un andamento anomalo rispetto alle restanti. Difatti calcolando indicativamente la media di tutti i valori, si trova $\bar{g} = 982$ cm/s² con uno scarto quadratico medio $\mu = 27$ cm/s² mentre lo scarto di ciascuna risulta $z_7 = 1093 - 982 = 111$ cm/s² e $z_{16} = 919 - 982 = -63$ cm/s². Per quanto detto sulla distribuzione normale (p. 35) ma anche sulla base del confronto di questi scarti con quelli della tabella 6, possiamo ritenere con buona probabilità che vi sia la presenza

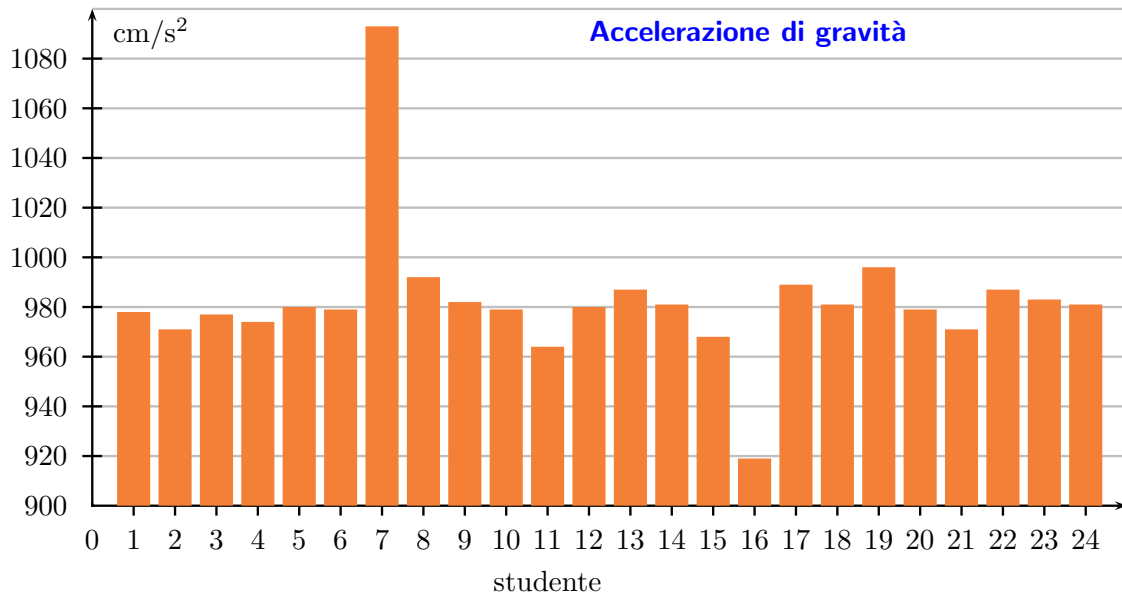


Fig. 32 Differenti stime dell'accelerazione di gravità.

di errori sistematici in queste due rilevazioni e quindi sia giustificata la loro esclusione dalle successive elaborazioni. Di queste misure, dovrebbero essere riviste le metodologie seguite, analizzando nei particolari il funzionamento e l'uso degli strumenti e riprendendo le elaborazioni numeriche.

Chiarita quindi la *necessità di disporre di un insieme di dati sufficientemente consistente*, siano le x_i le N determinazioni di cui disponiamo e σ_i le rispettive incertezze. Ricordando quanto detto nel cap. 3.1, la stima cercata non potrà essere la media aritmetica in quanto questa dà a ciascuna misura la medesima importanza mentre in questo caso si vuole assegnare alla misura più precisa un peso maggiore. Allora un termine del tipo

$$\frac{x_i}{\sigma_i^2} \quad (8.1)$$

può soddisfare a questa richiesta in quanto al diminuire di σ_i il *peso*

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

della singola misura x_i aumenta. Sommando tutti i termini analoghi a (8.1) si ottiene una relazione

$$\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \quad (8.2)$$

che combina linearmente tutte le determinazioni.

Un'ulteriore condizione da imporre alla precedente espressione riguarda il caso in cui tutte le misure x_i possiedono le medesime incertezze $\sigma_i = \sigma$ e quindi lo stesso peso $w = 1/\sigma^2$.

La formula cercata dovrà evidentemente ridursi a quella della media. Dividiamo quindi (8.2) per la somma di tutti i pesi

$$\sum \frac{1}{\sigma_i^2} = \sum w_i, \quad (8.3)$$

ottenendo

$$\frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}. \quad (8.4)$$

Questa, nell'ipotesi che per ogni i valga $\sigma_i = \sigma$, diviene

$$\frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} = \frac{\sum w x_i}{\sum w} = \frac{w \sum x_i}{N \cdot w} = \frac{\sum x_i}{N}$$

che risulta essere proprio la media aritmetica.

Applicando metodi che esulano dagli obiettivi di tale trattazione (metodo della massima verosimiglianza*) si giunge a dimostrare che un termine del tipo (8.4) è quello che rende massima la probabilità di trovare l'effettiva distribuzione delle misure per cui, in definitiva, il valore cercato \bar{x} risulta essere esplicitamente

$$\bar{x} = \frac{\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (8.5)$$

Alla \bar{x} si dà il nome di *media pesata* e, come già detto, i termini $w_i = 1/\sigma_i^2$ sono i relativi pesi.

L'errore che si assegna alla \bar{x} si ottiene applicando le formule della propagazione degli errori (6.2) e (6.4) cioè considerando la \bar{x} come una funzione delle variabili x_i , di ognuna delle quali è noto lo scarto quadratico medio σ_i . Si ottiene

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}}}, \quad (8.6)$$

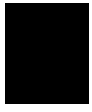
espressione che si riduce alla già nota $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{N}$ nell'ipotesi $\sigma_i = \sigma$.

Le (8.5) e (8.6) risolvono il problema iniziale. In base a queste, il valore dell'accelerazione di gravità \bar{g} che si deduce dalla tabella 6 risulta:

$$\bar{g} = (978 \pm 3) \text{ cm/s}^2 = (9,78 \pm 0,03) \text{ m/s}^2$$

in buon accordo con quanto aspettato.

* Si veda la nota a p. 33.



APPENDICE

Principali formule presenti nel testo

Nelle seguenti formule il simbolo \sum va sempre inteso come

$$\sum \equiv \sum_{i=1}^N$$

dove N rappresenta il numero totale dei dati x_i (o y_i). Inoltre \bar{x}, \bar{y} e σ_i rappresentano rispettivamente i valori medi di x, y e lo scarto quadratico medio della media.

- Propagazione degli errori massimi in una somma

$$\Delta y = \sum \Delta x_i \quad (2.15)$$

- Propagazione degli errori massimi in prodotti o quozienti

$$\Delta y = y \cdot \sum \frac{\Delta x_i}{x_i} \quad (2.20)$$

- Media

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \quad (3.2)$$

- Scarto quadratico medio

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} \quad (4.3)$$

- Scarto quadratico medio della media

$$\sigma = \frac{\mu}{\sqrt{N}} \quad (4.4)$$

- Errore medio

$$a = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N} \quad (5.2)$$

- Propagazione degli errori statistici in una somma

$$\mu_y = \sqrt{(\mu_{x_1})^2 + (\mu_{x_2})^2 + \dots + (\mu_{x_n})^2} \quad (6.4)$$

- Propagazione degli errori statistici in prodotti o quozienti

$$\frac{\mu_y}{\bar{y}} = \sqrt{[\alpha \cdot \epsilon_r(x_1)]^2 + [\beta \cdot \epsilon_r(x_2)]^2 + \dots + [\theta \cdot \epsilon_r(x_n)]^2} \quad (6.7)$$

- Retta dei minimi quadrati: $y = ax + b$

$$\begin{aligned} a &= \frac{N \sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right) \cdot \left(\sum y_i\right)}{N \sum (x_i)^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \\ &= \frac{N \sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right) \cdot \left(\sum y_i\right)}{\Delta} \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$\text{con } \Delta = N \sum (x_i)^2 - \left(\sum x_i\right)^2$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{\left(\sum y_i\right) \sum (x_i)^2 - \left(\sum x_i y_i\right) \sum x_i}{N \sum (x_i)^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \\ &= \frac{\left(\sum y_i\right) \sum x_i^2 - \left(\sum x_i y_i\right) \sum x_i}{\Delta} \end{aligned} \quad (7.9)$$

- Scarti quadratici medi di a e b

$$\mu_a = \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \cdot \mu_y \quad \mu_b = \sqrt{\frac{\sum (x_i)^2}{\Delta}} \cdot \mu_y$$

- Coefficiente di correlazione r

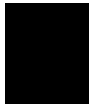
$$\begin{aligned}
 r &= \frac{N \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{N \sum (x_i)^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \sqrt{N \sum (y_i)^2 - (\sum y_i)^2}} \\
 &= \frac{\sum x_i y_i - N \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{(\sum (x_i)^2 - N \bar{x}^2)(\sum (y_i)^2 - N \bar{y}^2)}} \quad (7.18)
 \end{aligned}$$

- Media pesata

$$\bar{x} = \frac{\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (8.5)$$

- Scarto quadratico medio della media pesata

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (8.6)$$



BIBLIOGRAFIA

- M. Severi *Introduzione alla Esperimentazione Fisica*
Zanichelli
- M. Bertolotti, T. Papa, *Metodi d'osservazione e misura*
D. Sette Veschi
- D. Valenza *La misura con elementi di Teoria degli Errori*
Casa Editrice Ambrosiana
- M. Loreti *Teoria degli Errori e Fondamenti di Statistica*
Decibel Editrice
- J. R. Taylor *Introduzione all'analisi degli errori*
Zanichelli
- G. Castelnuovo *Calcolo delle Probabilità*
Zanichelli
- L. Vajani *Elementi di Statistica*
Cedam
- P. R. Bevington *Data reduction and error analysis
for the Physical Sciences*
Mc Graw-Hill
- M. Spiegel *Statistica*
Etas Libri